13.00.02 Теория и методика обучения и воспитания (по областям и уровням образования)

УДК 372.851 DOI 10.37493/2307-907X.2022.1.16

Гаджиев Джаваншир Джебраилович

МЕТОДОЛОГИЯ ПРЕПОДАВАНИЯ ИНТЕГРИРОВАНИЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЧАСТИЧНЫХ ДРОБЕЙ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ ДЕКОМПОЗИЦИИ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Проблемы, представленные в статье, являются прикладными задачами в разных областях математики и в инженерных науках. Все решенные задачи представлены в их полной версии и никогда ранее опубликованы не были. Следует отметить, что задачи в таких областях математики, как математика функций конечных переменных, дифференциальное исчисление и математический анализ, были разработаны непосредственно автором в годы преподавания в различных колледжах США в рамках развивающихся новых тенденций в эволюции учебных планов по математике в связи со стремительным развитием математических теорий и их приложений. Эти возникшие тенденции в теории и применении методологии математических наук предъявили новые требования к написанию и изданию современных учебников, что соответственно нашло отражение в разработке современных учебных планов для курсов математики, преподаваемых в колледжах и университетах. Задачи представлены в их полной формулировке и несокращенной версии в таких областях дифференциального исчисления, как (а) интегрирование рациональных дробей, (б) интегрирование тригонометрических функций и (в) формулы редукции (понижения степени подынтегральной функции) для интегрирования. Они являются отображением поступательного развития математических и инженерных наук, что, в свою очередь, предлагает большое разнообразие разработанных решений и выводов для обучающихся университетов на уровне бакалавриата. Проблемы, разработанные в статье, реструктурированы с точки зрения существующих современных методов решения задач в математике функций непрерывной переменной и приложении в инженерных науках. Более того, предложенные методы с большей вероятностью могут быть востребованными практикующими специалистами в передовых инженерных науках, а также в прикладных задачах, которые требуют получения конечных численных решений задач, описывающих реальные явления в инженерных науках и прикладных задачах математической физики.

Ключевые слова: *интегрирование, стандартные интегралы нестандартные интегралы, интегрирование по частям, интегрирование произведений функций, интегрирование рациональных дробей, интегрирование тригонометрических и трансцендентных функций.*

Djavanshir Gadjiev

THE METHODOLOGY OF TEACHING OF THE INTEGRATION TECHNIQUES OF THE RATIONAL FUNCTIONS BY USING PARTIAL FRACTION DECOMPOSITION METHOD AND INTEGRATION OF THE TRIGONOMETRIC FUNCTIONS

The problems introduced in the article here are the application problems from Mathematics and Engineering Sciences. All presented problems are unabridged and never published problems developed by the author for Pre-Calculus, Calculus and Differential Calculus subjects developed by the author during his teaching years at the colleges in USA. These unabridged problems are developed within the new trends in the evolutions of novelty of the syllabi in Mathematics due to the fast-pacing development of the Mathematics Sciences/ Theory and Applications. These new trends in the Theory and Application of Mathematics Sciences have been added new demands to the newly revised textbooks and corresponding *syllabi for the Mathematics Courses taught at the Junior two years Colleges and Universities. There are introduced newly generated unabridged problems with the topics such as (a) Integration by partial fractions, (b) Integration of trigonometric functions and (c) Reduction formulas for the integration. These newly developed problems are reflection of the Development of Mathematical and Engineering Sciences to offer great amount of learning conclusion/sequel to those who pursue a bachelor's degree at the universities. The problems presented in the article here are developed and restructured in terms of the newly developed techniques to solve the problem in Infinite Mathematics and Engineering sciences. Moreover, the techniques offered in the article here are more likely to get utilized in Advanced Engineering Sciences, too within the problems, which require to obtain finite numerical solutions to the Real Phenomena Natural Problems in Engineering Sciences and Applied Problems in Mathematical Physics.*

Key words: *integration, standard integrals, non-standard integrals, integration by parts, integration of the products, integration by partial fractions, integration of the trigonometric functions and transcendental function.*

Введение / Introduction. Период постиндустриального развития общества ознаменовал ведущую роль математики в деле решения прикладных задач в области межинтеграционных связей с другими естественными науками.

Задачи, представленные в данной статье, характеризуют связи математики с другими науками, в частности с инженерными науками. Разработка новых методологий и методики преподавания математики стала неизбежной необходимостью в связи со стремительным развитием математических наук.

Дальнейшая цифровизация, автоматизация и роботизация современного постиндустриального общества обусловила появление новейших требований к программе и методике преподавания математики как межинтеграционной дисциплины.

Задачи, рассматриваемые в данном исследовании, являются задачами прикладного характера в деле межинтеграционных связей математики с естественными науками. Все задачи и контрольные примеры разработаны автором в течение многолетней преподавательской деятельности. Следует отметить, что проблемы и задачи, представленные в данном исследовании, ранее нигде опубликованы не были.

Материалы и методы / Materials and methods. Новые тенденции в эволюции математических наук обусловили появление фундаментальной математической компоненты в написании математических учебников и новейших математических программ, что, в свою очередь, предопределило появление новейших методологий и методики преподавания математических дисциплин на уровне бакалавриата в университетах и колледжах педагогической направленности.

Результаты и обсуждение / Results and discussion. В данной статье констатируется новейшая методика преподавания математики с использованием фундаментальной компоненты основ высшей математики в деле разработки методов преподавания в таких частях высшей математики, как (a) интегрирование с использованием частичных дробей, (b) интегрирование тригонометрических функций и (c) редукционные методы интегрирования, или методы понижения степени подынтегральной функции.

Следует отметить, что представленные методики преподавания интегрирования функций являются непосредственным отражением поступательного развития математических наук в области прикладных и инженерных наук.

Представленная методика преподавания интегрирования предлагает обучающимся громадный познавательный импульс в дальнейшей преподавательской или исследовательской работе. Особенно важными являются предлагаемые методы преподавания интегрирования рациональных и тригонометрических функций для студентов университетов педагогических направлений на уровне бакалавриата, так как эти методы интегрирования дают возможность обучающемуся получить численное значение интегралов, в то время когда применение табличных интегралов не дает желаемого результата.

Подчеркивается, что новые представленные в исследовании задачи построены и организованы на основе новейших математических методов, применяемых в математике непрерывных функций, а также в прикладной инженерной математике. Более того, предложенные методика преподавания и методы решения задач могут быть использованы далее на уровне аспирантуры или в научно-исследовательских работах, где требуется получение непосредственного численного решения задач прикладного характера в математической физике или инженерной математике. Также предложенная методика преподавания интегрирования может быть использована преподавателями математики в процессе преподавания математических дисциплин на уровне бакалавриата в университетах педагогической направленности.

► Part 1. The integration by Partial Fraction Method (PF)

The integration by partial fraction method is originated from the application problems in Mathematics, Applied Mathematics and Engineering Sciences.

These types of the problems are evidently not the types of the integration of the standard types of the functions involved. These cases are involved with the integration of the functions in rational forms, when numerator represents a function, which is not a derivative of the function located at the denominator.

There are developed new modified rules in the article here , which are most likely to be utilized by the researchers in Applied Mathematics and /or Engineering Sciences.

The Rules of Partial Fraction Methods are:

(a) The degree of the function located at the numerator's place is lower than the degree of the function located at the denominator's place. If there is No such case, then it is necessarily to use a long division technique to divide numerator by the denominator.

(b) A linear factor $(sx+t)$ generates the partial fraction (PF) in the form

$$\frac{S}{(sx+t)};$$

(c) The quadratic factors $(sx+t)^2$ generates the PF:

$$\frac{S}{sx+t}+\frac{T}{(sx+t)^2};$$

(d) The cubic factors $(sx+t)^3$ generates the PF:

$$\frac{S}{sx+t}+\frac{T}{(sx+t)^2}+\frac{U}{(sx+t)^3};$$

(e) The quadratic trinomial factor (sx^2+tx+q) generates the PF:

$$\frac{sx+t}{sx^2+tx+q}.$$

The problems where are utilized the PF Rule(s):

[1] $\int\frac{x-1}{x^2-5x+6}dx=?$

Solution: *Step 1*: By using PF Rule we can represent the integrand as it is:

Step 1: By PF method:

$$\frac{x-1}{x^2-5x+6}=\frac{S}{(x-3)}+\frac{T}{(x-2)},$$

hence, $x-1=S(x-2)+T(x-3)$. (a) Here if , then $1=-T$ and $T=-1$, (b) if , then $2=S$.

Step 2: Now we must integrate:

$$\int\frac{2}{x-3}dx+\int\frac{-1}{x-2}dx=2\ln x-3)-\ln(x-2)+C.$$

[2] $\int \frac{2x^2}{(x-1)(x+1)^2}dx = ?$

Solution: *Step 1:* We must rewrite the original problem to take the coefficient of 2 out of the integral as it is shown below:

$$2\int \frac{x^2}{(x-1)(x+1)^2}dx = ?$$

The function degree in Numerator $=2$, function degree in denominator $=3$, so the Rule PF is satisfied.

Hence,

$$\frac{x^2}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{S}{(x-1)} + \frac{T}{(x+1)} + \frac{U}{(x+1)^2}.$$

Canceling the denominator, we obtain:

$$x^2 = S(x+1)^2 + T\left(x^2-1\right) + U\left(x-1\right)\ldots.(Z1)$$

Here, set $x-1=0$, then $x=1$ and equation (Z1) becomes: $1=4S$ and $S=\frac{1}{4}$.

$$1=4S \text{ and } S=\frac{1}{4}.$$

Next, set $x+1=0$, then $x=-1$ and equation (Z1) becomes: $1=-2U$ and $U=\frac{-1}{2}$.

To find T we can choose the highest exponent for x such as x^2: $1=S+T$ and

$$T = 1-S = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ and } T=\frac{3}{4}.$$

Step 2:

$$\int \frac{x^2}{(x-1)(x+1)^2}dx = \frac{1}{2}\left[\int\left(\frac{1}{4}\right)\frac{1}{x-1}dx + \int\left(\frac{3}{4}\right)\frac{1}{x+1}dx + \int\left(\frac{-1}{2}\right)\frac{1}{(x+1)^2}dx\right].$$

Step 3: Let us find

$$\int \frac{(-1)}{2(x+1)^2}dx = \frac{-1}{2}\int \frac{1}{(x+1)^2}dx = ?$$

Let us substitute $(x+\ )=q$, then $dq=dx$.

Hence,

$$\frac{-1}{2}\int \frac{1}{q^2}dq = \frac{-1}{2}\int q^{-2}dq = \frac{-1}{2}\left[\frac{q^{-1}}{-1}+C\right] = \frac{1}{2(x+1)}+C.$$

Step 4: So,

$$\int \frac{x^2}{(x-1)(x+1)^2}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\ln(x-1) + \frac{3}{4}\ln(x+1) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1)}\right)\right] + C = \frac{1}{8}\ln(x-1) + \frac{3}{8}\ln(x+1) + \frac{1}{4(x+1)} + C.$$

[3] $\int \frac{x^2-1}{(x-3)^3}dx = ?$

Solution: *Step 1:* Since Rules of PF method are satisfied, then we can write the following Partial Fraction's equation in terms of the integrand:

$$\frac{x^2-1}{(x-3)^3} = \frac{S}{(x-3)} + \frac{T}{(x-3)^2} + \frac{U}{(x-3)^3}.$$

Multiply both sides of PF equation by $(x-3)^3$ to arrive to the following equation: $x^2-1 = S(x-3)^2 + T(x-3) + U$.

Here if we set $x-3=0$, then $x=3$. Hence $U=8$.

Step 2: If we equate the coefficients with the highest exponent as x^2, then we get: $S=1$.
Now we equate the coefficients with the lowest power involved to get: $-1=9S-3T+U$.
Since $S=1$ and $U=8$ we get: $-3T=-18$ and $T=6$.
Step 3: Now we obtained PF integration:

$$\int\frac{x^2-1}{(x-3)^3}dx=\int\frac{1}{(x-3)}dx+\int\frac{6}{(x-3)^2}dx+\int\frac{8}{(x-3)^3}dx.$$

Step 4:

$$6\int\frac{1}{(x-3)^2}dx=\frac{6(x-3)^{-1}}{-1}+C=\frac{-6}{x-3}+C,\ 8\int\frac{1}{(x-3)^3}dx=\frac{8(x-3)^{-2}}{-2}+C=\frac{-4}{(x-3)^2}+C.$$

Hence,

$$\int\frac{x^2-1}{(x-3)^3}dx=\ln(x-3)-\frac{6}{(x-3)}-\frac{4}{(x-3)^2}+C.$$

[4] $\int\frac{x^2}{(x+2)(x^2+1)}dx=?$

Solution: *Step 1:*

$$\frac{x^2}{(x+2)(x^2+1)}=\frac{S}{x+2}+\frac{Tx+Q}{x^2+1}.$$

Cancel denominator to obtain: $x^2=S(x^2+1)+(Tx+Q)(x+2)$. Here set $x+2=0$, then $x=-2$, and thereafter, $4=5S$ and $S=\frac{4}{5}$.

Step 2: Let us equate the coefficients for power of x^2: $1=S+T$, hence $T=1-S=\frac{1}{5}$. Now let's equate coefficients for the constant terms: $0=S+2Q$ and $2Q=-S$, hence $Q=-\frac{2}{5}$.
Step 3: Now we must integrate the following PF:

$$\frac{x^2}{(x+2)(x^2+1)}=\frac{4}{5}\frac{(1)}{(x+2)}+\frac{1}{5}\frac{x}{(x^2+1)}-\frac{2}{5}\frac{(1)}{(x^2+1)}.$$

Step 4: $\int\frac{x^2}{(x+2)(x^2+1)}dx=\frac{4}{5}\ln(x+2)+\frac{1}{10}\ln(x^2+1)-\frac{2}{5}tan^{-1}x+C$.

[5] $\int\frac{5x^2-1}{x(3x+1)^2}dx=?$
Solution: *Step 1:* Rule(s) of PF method are satisfied to get PF here:

$$\frac{5x^2-1}{x(3x+1)^2}=\frac{S}{x}+\frac{T}{(3x+1)}+\frac{Q}{(3x+1)^2}.$$

Now we can cancel the common denominator to arrive to the horizontally aligned equation:

$$5x^2-1=S(3x+1)^2+Tx(3x+1)+Qx\ .(\mathrm{I})$$

Here we can set $3x+1=0$ to get

$$x=\frac{-1}{3}.$$

Now substitute the value of

$$x=\frac{-1}{3}$$

at the equation (I) to have:

$$5\frac{1}{9}-1=\frac{-1}{3}Q\ \text{and}\ Q=\frac{4}{3}.$$

Step 2: Now equate coefficients for x^2: $5 = 9S + 3T$, then

$$T = \frac{5-9S}{3}.\text{(II)}$$

Step 3: Now equate the constant coefficients: $-1 = S$. Substituting $S = -1$ in equation (II) we get

$$T = \frac{14}{3}.$$

Step 4: Now we have PF integration:

$$\int \frac{5x^2}{x(3x+1)^2}dx = \int \frac{(-1)}{x}dx + \int \left(\frac{14}{3}\right)\frac{1}{3x+1}dx + \int \left(\frac{4}{3}\right)\frac{1}{(3x+1)^2}dx.$$

Step 5: Now for the second and third integrals we get:

$$\frac{14}{3}\int \frac{1}{3x+1}dx = \frac{14}{3}\int \frac{1}{v}\left(\frac{1}{3}\right)dv = \frac{14}{9}\ln v + C = \frac{14}{9}\ln(3x+1) + C,$$

where $3x+1 = v$ and $dx = \frac{dv}{3}$. $\frac{4}{3}\int \frac{1}{(3x+1)^2}dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{3}\right)dz = \frac{4}{9}\int z^{-2}dz = \frac{4}{9}\frac{z^{-1}}{(-1)} + C = \frac{-4}{9}\left(\frac{1}{3x+1}\right) + C$.

Step 6: Now let us finalize integration from Step 4:

$$\int \frac{5x^2}{x(3x+1)^2}dx = -\ln x + \frac{14}{9}\ln(3x+1) - \frac{4}{9(3x+1)} + C.$$

► **Part 2 (a). Integration of the power trigonometric functions**

There are shown below basic trigonometric integrals, which we are going to use for the integration of the trigonometric powers:

$\int \sin v dv = -\cos v + C, \int \cos v dv = \sin v + C$.

If we integrate powers such as $sin^2 v$ and $cos^2 v$, we must utilize the double angle identities for the trigonometric functions:

$$\cos 2v = 1 - 2sin^2 v = 2cos^2 v - 1,\ sin^2 v = \frac{1}{2}(1-\cos 2v) \text{ and } cos^2 v = \frac{1}{2}(1+\cos 2v).$$

[1] $$\int \sin^2 v dv = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2v)dv = \frac{v}{2} - \frac{\sin 2v}{4} + C, \quad (1)$$

[2] $$\int \cos^2 v dv = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2v)dv = \frac{v}{2} + \frac{\sin 2v}{4} + C. \quad (2)$$

To integrate higher powers of trigonometric function(s), we can take one of the linear factors from power to reduce integration to the second power of the trigonometric functions as it was shown above in (III) and (IV).

[3] $$\int \boldsymbol{sin^3 v dv} = \int sin^2 v \sin v dv = \int (1 - cos^2 v)\sin v dv = \int \sin v dv - \int cos^2 v \sin v dv = -\cos \boldsymbol{v} + \frac{\boldsymbol{cos^3 v}}{3} + \boldsymbol{C}. \quad (3)$$

Similarly, we can obtain:

[4] $$\int \boldsymbol{cos^3 v dv} = \int cos^2 v \cos v dv = \int (1 - sin^2 v)\cos v dv = \int \cos v dv - \int sin^2 v \cos v dv = \sin \boldsymbol{v} - \frac{\boldsymbol{sin^3 v}}{3} + \boldsymbol{C}. \quad (4)$$

We can proceed further to integrate next powers of the trigonometric functions such as 4-th and 5-th powers.

[5] $$\begin{aligned}\int \cos^4 v dv &= \int (\cos^2 v)^2 dv = \int \frac{(1+\cos 2v)^2}{4}dv = \int \frac{(1+2\cos 2v + \cos^2 2v)}{4}dv = \\ &= \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 2v + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4v\right)dv = \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2} + 2\cos 2v + \frac{1}{2}\cos 4v\right)dv = \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{3v}{2} + \sin 2v + \frac{\sin 4v}{8}\right] + C = \frac{3v}{8} + \frac{\sin 2v}{4} + \frac{\sin 4v}{32} + C\end{aligned}. \quad (5)$$

[6]
$$\int \sin^5 v dv = \int \sin^4 v \sin v dv = \int \left(1-\cos^2 v\right)^2 \sin v dv =$$
$$= \int \left(1-2\cos^2 v+\cos^4 v\right)\sin v dv = \int \sin v dv - 2\int \cos^2 v \sin v dv + \int \cos^4 v \sin v dv = \qquad (6)$$
$$= -\cos v + \frac{2\cos^3 v}{3} - \frac{\cos^5 v}{5} + C$$

[7]
$$\int \cos^5 v dv = \int \cos^4 v \cos v dv = \int \left(1-2\sin^2 v+\sin^4 v\right)\cos v dv =$$
$$= \int \cos v dv - 2\int \sin^2 v \cos v dv + \int \sin^4 v \cos v dv = \sin v - \frac{2\sin^3 v}{3} + \frac{\sin^5 v}{5} + C. \qquad (7)$$

We must note that this strategy in problems (1) – (7) to reduce the highest powers to the lowest powers can be applied to the higher powers greater than 5 up to the n-th power.

► **Part 2 (b). Integration of the trigonometric functions involving trigonometric sum and difference identities**

There are given below trigonometric identities, which we are ready to use:

$$2\sin x \cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y), \text{(b1)}$$
$$2\cos x \sin y = \sin(x+y) - \sin(x-y), \text{(b2)}$$
$$2\cos x \cos y = \cos(x+y) + \cos(x-y), \text{(b3)}$$
$$2\sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y). \text{(b4)}$$

[1] $\int \sin 8v \cos 4v dv = ?$

Solution: *Step 1:* Here we are going to use (b1):

$$sin8vcos4v = \frac{1}{2}(2sin8vcos4v) = \frac{1}{2}(\sin(8v+4v) + \sin(8v-4v)) = \frac{1}{2}(sin12v + sin4v).$$

Step 1: $\int sin8vcos4vdv = \frac{1}{2}\int(sin12v + sin4v)dv = \frac{-cos12v}{24} - \frac{cos4v}{8} + C$.

[2] $\int \cos 10v \sin 6v dv = ?$

Solution:

$$\int cos10vsin6vdv = \frac{1}{2}\int(2cos10vsin6v)dv = \frac{1}{2}\int(\sin(10v+6v) - \sin(10v-6v)dv =$$
$$= \frac{1}{2}\int(sin16v - sin4v)dv = \frac{1}{2}\left(-\frac{cos16v}{16} + \frac{cos4v}{4}\right) + C = \frac{-cos16v}{32} + \frac{cos4v}{8} + C.$$

[3] $\int \cos 12v \cos 8v dv = ?$

Solution:

$$\int cos12vcos8vdv = \frac{1}{2}\int 2cos12vcos8vdv = \frac{1}{2}\int(cos20v + cos4v)dv =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{sin20v}{20} + \frac{sin4v}{4}\right) + C = \frac{sin20v}{40} + \frac{sin4v}{8} + C.$$

[4] $\int \sin 15v \sin 3v dv = ?$

Solution:

$$\int sin15vsin3vdv = \frac{1}{2}\int 2sin15vsin3vdv =$$
$$= \frac{1}{2}\int(\cos(15v-3v) - \cos(15v+3v))dv = \frac{1}{2}\int(cos12v - cos18v)dv = .$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{sin12v}{12} - \frac{sin18v}{18}\right) + C = \frac{sin12v}{24} - \frac{sin18v}{36} + C$$

► **Part 3. Learning outcomes with further integration problems by utilizing integration techniques introduced in the article here. Find the following integrals**

[1] $\int \frac{6x^2}{(x+1)(x^2-x+1)}dx = ?$

Solution: *Step 1:* $(x+1)(x^2-x+1) = x^3+1$.

Step 2:

$$\int \frac{6x^2}{(x^3+1)}dx = \int \frac{6x^2}{v}\frac{dv}{3x^2} = 2\int \frac{dv}{v} = 2\ln v + C = 2\ln(x^3+1) + C = 2\ln(x+1)(x^2-x+1) + C,$$

where $v = x^3+1$ and $\frac{dv}{dx} = 3x^2$, hence $dx = \frac{dv}{3x^2}$.

[2] $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 14v \cos 10v dv = ?$

Solution: *Step 1:* Using (b1) we have:

$$\frac{1}{2}[2\sin 14v cos 10v] = \frac{1}{2}(\sin 24v + \sin 4v).$$

Step 2:

$$\int \frac{1}{2}(sin24v + sin4v)dv = \frac{1}{2}[\int sin24vdv + \int sin4vdv] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-cos24v}{24} - \frac{cos4v}{4}\right] + C = \frac{-cos24v}{48} - \frac{cos4v}{8}.$$

Step 3:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin14vcos10vdv = \left[\frac{-cos24v}{48} - \frac{cos4v}{8}\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{-1}{48} - \frac{1}{8} = \frac{-3}{16}.$$

[3] $\int \frac{\sin 2v}{2+\cos^2 v}dv = ?$

Solution: *Step 1:*

Let $(2+cos^2v) = u$. So, $\frac{du}{dv} = 2cosv(-sinv) = -sin2v$. Then $dv = \frac{du}{-sin2v}$.

Step 2:

$$\int \frac{sin2v}{2+cos^2v}dv = \int \frac{sin2v}{u}\frac{du}{(-sin2v)} = -\ln u + C = -\ln(2+cos^2v) + C.$$

[4] $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x dx = ?$

Solution: *Step 1:* Let us integrate indefinite integral first $\int xcos^2xdx$. Here let us set $x = u$ and $cos^2xdx = dv$ perform integration by parts:

Therefore, $du = dx$ and $\int cos^2xdx = \int dv$. $v = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$.

Step 2:

$$\int udv = uv - \int vdu = x\left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right) - \int\left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right)dx.$$

Step 3:

$$\int\left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right)dx = \int \frac{x}{2}dx + \int \frac{sin2x}{4}dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) + C = \frac{x^2}{4} - \frac{\cos 2x}{8} + C.$$

Step 4:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} xcos^2 xdx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x\sin 2x}{4} - \frac{x^2}{4} + \frac{\cos 2x}{8}\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2 - 4}{16}.$$

[5] $\int \frac{2x+3}{(x^2+3x+5)^{\frac{5}{2}}} dx = ?$

Solution: *Step 1:* Let us set $\left(x^2+3x+5\right) = u$, then

$$dx = \frac{du}{\left(2x+3\right)}.$$

Step 2:

$$\int \frac{\left(2x+3\right)du}{u^{\frac{5}{2}}\left(2x+3\right)} = \int \frac{du}{u^{\frac{5}{2}}} = \frac{-2}{3u^{\frac{3}{2}}} + C = \frac{-2}{3}(x^2+3x+5)^{\frac{-3}{2}} + C.$$

[6] $\int \frac{x+3}{\left(x+1\right)\left(x^2-2x+3\right)} dx = ?$

Solution: *Step 1:* Let us perform Partial Fraction method on the integrand:

$$\frac{x+3}{\left(x+1\right)\left(x^2-2x+3\right)} = \frac{S}{x+1} + \frac{T}{x^2-2x+3}.$$

Here we have after canceling the denominator:

$$\left(x+3\right) = S\left(x^2-2x+3\right) + T\left(x+1\right). \text{(A)}$$

Let us set $x+1=0$ and then $x=-1$. Substituting $x=-1$ in the equation (A) we have: $2=6S$ and hence $S=\frac{1}{3}$.

Now equating the coefficients for the linear terms of x we have: $1=-2S+T$ and hence $T=\frac{5}{3}$.
Step 2: Now we must integrate:

$$\int \frac{1}{3\left(x+1\right)} dx + \int \frac{5}{3}\frac{1}{\left(x^2-2x+3\right)} dx = \frac{1}{3}\ln\left(x+1\right) + \frac{5}{3}\ln(x^2-2x+3) + C.$$

[7] $\int \frac{2x^2}{x-5} dx = ?$

Solution: *Step 1:* Since the degree of the numerator of the integrand is higher than the degree of the denominator, let us perform long division to obtain:

$$\frac{2x^2}{x-5} = \left(2x+10\right) + \frac{50}{\left(x-5\right)}$$

Step 2: Hence we must integrate:

$$\int \left(2x+10\right)dx + \int \frac{50}{\left(x-5\right)} dx = \frac{1}{4}(2x+10)^2 + 50\ln\left(x-5\right) + C.$$

[8] $\int \frac{3x^2-2.5x-1}{\left(x-1\right)\left(x^2+1\right)} dx = ?$

Solution: *Step 1:* Let us utilize Partial Fractions method on the integral:

$$\frac{3x^2-2.5x-1}{\left(x-1\right)\left(x^2+1\right)} = \frac{S}{\left(x-1\right)} + \frac{TX+C}{x^2+1}.$$

Canceling the common denominator, we have obtained:

$$3x^2 - 2.5x - 1 = S\left(x^2+1\right) + \left(TX + C\right)\left(x-1\right) .\text{(B)}$$

Let us set $x-1=0$, hence $x=1$. Substituting $x=1$ in (B) we have: $1=2S$ and $S=1/2$.
Equating coefficients for x^2 we have gotten: $3=S+T$ and $T=5/2$.
Equating coefficients for x we have result for C: $-2.5=-T+C$ and $C=0$.
Step 2: Therefore, our integrand becomes:

$$\int\frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{5x}{x^2+1}\right]dx = \frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}dx + \frac{1}{2}\int\frac{5x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x-1\right) + \frac{1}{2}\int\frac{5x}{x^2+1}dx \text{ .(C)}$$

Step 3: $\int\frac{5x}{x^2+1}dx = ?$ Here let us set $x^2+1=u$ and $\frac{du}{dx}=2x$. Hence $dx=\frac{du}{2x}$. Our integrand becomes:

$$\int\frac{(5x)}{u}\frac{du}{2x} .$$

Next: we can re-write integrand as it is:

$$\int\frac{5du}{2u} = \frac{5}{2}\int\frac{du}{u} = \frac{5}{2}\ln u + C = \frac{5}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C \text{ .(D)}$$

Step 4: Now incorporating (D) in (C) we, finally get:

$$\int\frac{3x^2-2.5x-1}{\left(x-1\right)\left(x^2+1\right)}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x-1\right) + \frac{5}{4}\ln\left(x^2+1\right) + C .$$

[9] $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\pi + x\right)\sin x dx = ?$

Solution: *Step 1:* Let us integrate indefinite integral:

$$\int\left(2\pi + x\right)sinxdx = \int 2\pi dx + \int xsinxdx = 2\pi x + \int xsinxdx \text{ .(E)}$$

Step 2: $\int xsinxdx = ?$ Here let us set $x=u$ and $du=dx$. $sinxdx=dv$ and $\int sinxdx = \int dv$. Hence $-cosx=v$.

$$\int xsinxdx = -xcosx - \int\left(-1\right)cosxdx = -xcosx + sinx + C \text{ .(F)}$$

Step 3: Finally, incorporating (F) in (E): $\int\left(2\pi + x\right)sinxdx = 2\pi x + sinx - xcosx + C$.

[10] $\int\limits_1^n z^2(z-n)^t dz = ?, where\, t>0$.

Solution: *Step 1:* Let us use Integration by Parts method:

Let us set $z^2=u$ and $du=2zdz$. Then $dz=\frac{du}{2z}$. Next, $(z-n)^t dz = dv$ and $\int dv = \int(z-n)^t dz$. Hence,

$$v = \frac{(z-n)^{t+1}}{\left(t+1\right)} + C .$$

Step 2:

$$\int udv = uv - \int vdu = z^2\frac{(z-n)^{t+1}}{\left(t+1\right)} - \frac{1}{\left(t+1\right)}\int(z-n)^{t+1}\left(2z\right)dz \text{ .(G)}$$

Step 3: $2\int(z-n)^{t+1}zdz = ?$ Let us use the Integration by Parts method again: Let us set $z=u$, hence $dz=du$. Next, here $(z-n)^{t+1}dz=dv$. Here

$$v = \int(z-n)^{t+1}dz = \frac{(z-n)^{t+2}}{t+2} + C .$$

Now

$$2\int(z-n)^{t+1}(z)dz=2\left[\frac{z(z-n)^{t+2}}{t+2}-\frac{1}{t+2}\int(z-n)^{t+2}dz\right]=2\left[\frac{z(z-n)^{t+2}}{t+2}-\frac{(z-n)^{t+3}}{(t+2)(t+3)}\right]+C.$$

Step 4: Now let us accumulate all steps in last to get:

$$\int_1^n z^2(z-n)^t dz=\left(\frac{z^2(z-n)^{t+1}}{(t+1)}-\frac{2z(z-n)^{t+2}}{(t+1)(t+2)}+\frac{2(z-n)^{t+3}}{(t+1)(t+2)(t+3)}\right)\Bigg|_1^n= \\ =\frac{-(1-n)^{t+1}}{(t+1)}+\frac{2(1-n)^{t+2}}{(t+1)(t+2)}-\frac{2(1-n)^{t+3}}{(t+1)(t+2)(t+3)}+C.$$

[11] $\int\frac{5x^2-8x+14}{(x-1)(x^2+2)}dx=?$

Solution: *Step 1:* Let us use method of the Partial Fractions:

$$\frac{5x^2-8x+14}{(x-1)(x^2+2)}=\frac{S}{(x-1)}+\frac{Tx+C}{(x^2+2)}.$$

Here let us cancel common denominator to obtain:

$$5x^2-8x+14=S(x^2+2)+(Tx+C)(x-1).\text{(H)}$$

Here in (H) let us set $(x-1)=0$, hence $x=1$. Substitute $x=1$ in (H) to have: $11=3S$ and $S=\frac{11}{3}$. Next, let us equate the coefficients for x^2: $5=S+T$ and $T=\frac{4}{3}$.

Next, let us equate the linear coefficients for x: $-8=-T+C$ and $C=\frac{-20}{3}$.

Therefore, our integral is the following:

Step 2: Find:

$$\frac{11}{3}\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{\frac{4}{3}x-\frac{20}{3}}{x^2+2}dx=\frac{11}{3}\ln(x-1)+\frac{4}{3}\int\frac{x}{x^2+2}dx-\frac{20}{3}\int\frac{1}{x^2+2}dx=\frac{11}{3}\ln(x-1)-\frac{20}{3}tan^{-1}x+\frac{4}{3}\int\frac{x}{x^2+2}dx.$$

Step 3:

$$\int\frac{x}{x^2+2}dx=\int\frac{xdu}{u(2x)}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u}=\frac{1}{2}\ln(x^2+2)+C,$$

where $u=x^2+2$ and $du=2xdx$, hence

$$dx=\frac{du}{2x}.$$

Step 4: Now accumulating results from Step 1 through Step 3 we have:

$$\int\frac{5x^2-8x+14}{(x-1)(x^2+2)}dx=\frac{11}{3}\ln(x-1)-\frac{20}{3}tan^{-1}x+\frac{2}{3}\ln(x^2+2)+C.$$

[12] $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 6x\cos 3xdx=?$

Solution: *Step 1:* The integrand based on the trigonometric identities' property can be re-written as it is:

$$cos6xcos3x=\frac{1}{2}\left[\cos(6x+3x)+\cos(6x-3x)\right].$$

Therefore, our initial integral is the following:
Step 2:

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}[cos9x+cos3x]dx=\frac{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}cos9xdx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}cos3xdx}{2}=\left[\frac{1}{2}\frac{sin9x}{9}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+\left[\frac{1}{2}\frac{sin3x}{3}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{9}.$$

[13] $\int\frac{\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}dx=?$

Solution: *Step 1:* Let us set $cos^{-1}x=z$. Hence

$$\frac{dz}{dx}=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ and } dz=\frac{(-1)dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Step 2: Therefore, we have:

$$-\int zdz=-\frac{z^2}{2}+C=\left(\frac{-1}{2}\right)[cos^{-1}x]^2+C.$$

[14] $\int_0^2\frac{x^2-3x}{(2x+5)(x^2+1)}dx=?$

Solution: *Step 1:* Let us utilize the Partial Fractions method:

$$\frac{x^2-3x}{(2x+5)(x^2+1)}=\frac{S}{2x+5}+\frac{Tx+C}{x^2+1}.$$

Here let us cancel common denominator to obtain:

$$x^2-3x=S(x^2+1)+(Tx+C)(2x+5).\text{(I)}$$

Let us set $2x+5=0$ and

$$x=\frac{-5}{2}.$$

Now substitute

$$x=\frac{-5}{2}$$

in (I) to obtain:

$$\frac{55}{4}=\frac{29}{4}S$$

and hence

$$S=\frac{55}{29}.$$

Now let us equate the coefficients for x^2: $1=S+2T$ and

$$T=\frac{-18}{29}.$$

Next, equate the coefficient for linear x: $-3=5T+2C$ and here

$$C=\frac{93}{58}.$$

Step 2: Now our original integral becomes as it is:

$$\frac{55}{29}\int_0^2\frac{1}{(2x+5)}dx+\int_0^2\frac{\frac{-18}{29}x+\frac{93}{58}}{x^2+1}dx=\frac{55}{29}\ln(2x+5)]_0^2+\frac{1}{58}\int_0^2\frac{-36x+93}{x^2+1}dx=$$

$$=\frac{55}{29}\ln9-\frac{55}{29}\ln5-\frac{18}{29}\int_0^2\frac{x}{x^2+1}dx+\frac{93}{58}\int_0^2\frac{1}{x^2+1}dx=\frac{55}{29}\ln\frac{9}{5}+\frac{93}{58}\tan^{-1}x]_0^2-\frac{18}{29}\int_0^2\frac{x}{x^2+1}dx$$

Here,

$$\int_0^2 \frac{x}{x^2+1}dx = \int_0^2 \frac{1}{u}\frac{xdu}{2x} \approx ,$$

where $x^2+1=u$ and

$$dx = \frac{du}{2x}, \ \approx \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{du}{u} = \frac{1}{2}[ln(x^2+1)]_0^2 = \frac{1}{2}[ln5 - ln1] = ln\sqrt{5} .$$

Step 3: So,

$$\int_0^2 \frac{x^2-3x}{(2x+5)(x^2+1)}dx = \frac{55}{29}ln\frac{9}{5} + \frac{93}{58}tan^{-1}x]_0^2 - \frac{18}{29}ln\sqrt{5} = \frac{55}{29}ln\frac{9}{6} + \frac{93}{58}tan^{-1}2 - \frac{18}{29}ln\sqrt{5} .$$

[15] $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx = ?$

Solution: *Step 1:* Let perform Integration by Parts method. Let set $x^2 = u$

$$\text{and } \frac{du}{dx} = 2x \text{ and } du = 2xdx .$$

Here $cosxdx = dv$ and $\int cosxdx = \int dv$. Then $v = sinx + C$. Therefore,

$$\int udv = uv - \int vdu = x^2 sinx - \int sinx(2x)dx = x^2 sinx - 2\int xsinxdx .$$

Step 2: Perform Integration by Part again: $\int xsinxdx = -xcosx - \int(-cosx)dx = -xcosx + sinx + C$.
Step 3:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 cosxdx = [x^2 sinx + 2xcosx - 2sinx]]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} - 2 .$$

[16] $\int_0^{\pi} x^3 \sin^2 xdx = ?$

Solution: *Step 1:* Let us first integrate the indefinite integral: $\int x^3 sin^2 xdx = ?$ Let us use the Integration by Parts method (IBP): Let us set $x^3 = u$ and, then $du = 3x^2dx$. Next, $sin^2xdx = dv$. $\int sin^2xdx = \int dv$. Here

$$v = \frac{x}{2} - \frac{sin2x}{4} + C .$$

$$\int udv = uv - \int vdu = \frac{x^4}{2} - \frac{x^3 sin2x}{4} - \int\left[\frac{x}{2} - \frac{sin2x}{4}\right](3x^2)dx = \frac{x^4}{2} - \frac{x^3 sin2x}{4} - \frac{3}{2}\int x^3dx + \frac{3}{4}\int x^2 sin2xdx .$$

Step 2:

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C .$$

Step 3: $\int x^2 sin2xdx = ? \rightarrow$ Here let us use IBM method again: Set $x^2 = u$, then $du = 2xdx$.
Since $sin2xdx = dv$, then

$$v = \int sin2xdx = \frac{-cos2x}{2} + C .$$

Therefore,

$$\int x^2 sin2xdx = \frac{-x^2cos2x}{2} - \int\left(\frac{-cos2x}{2}\right)(2x)dx = \frac{-x^2cos2x}{2} + \int xcos2xdx =$$
$$= \frac{-x^2cos2x}{2} + \frac{xsin2x}{2} - \int\frac{sin2x}{2}dx = \frac{-x^2cos2x}{2} + \frac{xsin2x}{2} + \frac{cos2x}{4} + C .$$

Here we have used IBP method again for $\int xcos2xdx$.

Step 4: Finally,

$$\int_0^{\pi} x^3 sin^2 dx = \left\{\frac{x^4}{2} - \frac{x^3 sin2x}{4} - \frac{3x^4}{8} - \frac{3x^2 cos2x}{8} + \frac{3xsin2x}{8} + \frac{3cos2x}{16}\right\}\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^4}{2} - \frac{3\pi^4}{8} - \frac{3\pi^2}{8} + \frac{3}{16} = \frac{2\pi^4 - 6\pi^2 + 3}{16}.$$

[17] $\int_0^1 x\cot^{-1} xdx = ?$

Solution: *Step 1:* Let us set $cot^{-1}x = u$. Then

$$\frac{du}{dx} = \frac{-1}{1+x^2}.$$

Hence,

$$du = \frac{-dx}{1+x^2}.$$

Next, here $xdx = dv$ and $\int xdx = \int dv$. Hence,

$$v = \frac{x^2}{2} + C.$$

Now let us use the IBP method to integrate: $\int udv = uv - \int vdu$.

$$\int udv = \frac{x^2 cot^{-1}x}{2} - \int \frac{x^2}{2}\frac{(-dx)}{1+x^2} = \frac{x^2 cot^{-1}x}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx.$$

Step 2:

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = ?$$

Let us represent the integrand as it is:

$$\frac{1}{1+u^2}, \text{ where } u = \frac{1}{x} \text{ and } u^2 = \frac{1}{x^2}.$$

Therefore,

$$\int \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} d\left(\frac{1}{x}\right) = tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)^2 + C.$$

Step 3: Finally,

$$\int_0^1 xcot^{-1}xdx = \frac{x^2 cot^{-1}x}{2} + \frac{tan^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right)}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{8}.$$

[18] $\int (x^4 - 4x)^{\frac{3}{2}}\left(x^3 - 1\right)dx = ?$

Solution: Step 1: Let us set $\left(x^4 - 4x\right) = u$. Then

$$\frac{du}{dx} = 4x^3 - 4 = 4\left(x^3 - 1\right).$$

Hence $du = 4\left(x^3 - 1\right)dx$.
Step 2:

$$\int \frac{4u^{\frac{3}{2}}\left(x^3 - 1\right)dx}{4} = \frac{1}{4}\int u^{\frac{3}{2}}du = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5}\right)u^{\frac{5}{2}} + C = \frac{1}{10}(x^4 - 4x)^{\frac{5}{2}} + C.$$

[19] $\int x^2\sqrt{\left(1-x^3\right)}dx = ?$

Solution: *Step 1:* Let us set $\left(1-x^3\right)=u$, then

$$\frac{du}{dx}=-3x^2$$

and $du=-3x^2dx$.

Step 2: Hence,

$$\int\frac{\sqrt{u}\left(-3x^2\right)dx}{\left(-3\right)}=\frac{-1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du=\frac{-1}{3}\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C=\frac{-2}{9}(1-x^3)^{\frac{3}{2}}+C.$$

[20] $\int\frac{9-x}{(x)^2\left(x-1\right)}dx=?$

Solution: *Step 1:* Let us use Partial Fractions method to integrate:

$$\frac{9-x}{(x)^2\left(x-1\right)}=\frac{S}{x-1}+\frac{Tx+C}{(x)^2}.$$

Canceling the common denominators from both sides we have:

$$\left(9-x\right)=S(x)^2+\left(Tx+C\right)\left(x-1\right).\text{(PF)}$$

Here let us set $(\ \ -1)=0$ and $x=1$.

Now substituting $x=1$ back to the equation (PF) we have: $S=8$.

Now equating the coefficients for x^2 we have: $0=S+T$ and $T=-8$.

Next, equating coefficients for x we have: $-1=-T+C$ and $C=-9$.

Step 2: Therefore, our original is transformed to form integrals in line:

$$\begin{aligned}&\int\frac{2}{x-1}dx+\int\frac{-8x-9}{(x)^2}dx=2\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{-8x}{(x)^2}dx+\int\frac{-9}{(x)^2}dx=\\&=2\ln\left(x-1\right)-8\int\frac{dx}{x}-9\int x^{-2}dx=2\ln\left(x-1\right)-8\ln x+\frac{9}{x}+C\end{aligned}.$$

► Part 4. The Test Exercises as the reflection of the Learning Outcomes from Part 1 through Part 3.

[1] $\int e^{sinx}cosxdx=?$

[2] $\int\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx=?$

[3] $\int cot^2xdx=?$

[4] $\int x^3sin3xdx=?$

[5] $\int e^{-4x}sin2xdx=?$

[6] $\int sin^8xdx=?$

[7] $\int cos^3xdx=?$

[8] $\int\frac{8x-4}{x^2-x+7}dx=?$

[9] $\int x\sqrt{1-x^2}dx=?$

[10] $\int\frac{2x-5}{x^2-10x+21}dx=?$

[11] $\int \frac{3x^2+2x+1}{(x-2)(x^2+2)}dx = ?$

[12] $\int sin6xcos4xdx = ?$

Conclusion

There were presented unabridged and newly generated integration problems in the article here. There was suggested newly revised and improved Partial Fraction Method (PF) to integrate the variety of the polynomial functions and rational functions with the provided detailed solution to each integral considered in the article here. Furthermore, there was suggested the newly composed the Rule(s) of PF method, which can be utilized for the wide variety of the integration problems occurring in the field of Engineering Sciences and Applied Mathematics. The newly revised PF method was supported by the detailed solutions to the unabridged problems arisen in the field of applied mathematical and engineering sciences. These problems have been handpicked selected to reflect the growing demand for the new versions of the syllabi in the field of Mathematical Sciences [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15].

Moreover, there were presented integration problems for power trigonometric functions, which are in great demand in the applied Engineering Sciences and Applied Mathematics, too. Furthermore, there were presented the Learning Outcomes for each part of the integration problems considered in the article here.

The learning outcomes derived from the detailed analytical solutions presented in the article here. These outcomes can be utilized in the form such as the reference materials for the standard and nonstandard integration problems to be suggested for the mathematics department of colleges and universities.

Moreover, the problems, which are considered in the article here have been arisen due to the development of the theories in the Mathematics Sciences and/or taken place in the Applied Mathematics Sciences. It is worthwhile to mention that these problems with the detailed solution provided here can be successfully utilized as the reference guideline-materials for the solutions of other similar integration problem(s) existed in the various Engineering research field across the Engineering Sciences merged with other technical fields, too.

ЛИТЕРАТУРА И ИНТЕРНЕТ-РЕСУРСЫ

1. Абдуразаков, М. М. Создание классов элементарных функций в комплексных моделях обучения математике в высшей школе : доклад / М. М. Абдуразаков, Дж. Д. Гаджиев, А. З. Салахов // Сборник материалов IV Международной конференции «Многомасштабное моделирование структур, строение вещества, наноматериалы и нанотехнологии» / под общ. ред. В. А. Панина. – Доп. том. – Тула : Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого. – 342 с. – Текст : непосредственный.
2. Страуд, К. А. Инженерная математика / К. А. Страуд. – 6-е изд. – New York : Industrial Press INC, 2007. – Текст : непосредственный.
3. Перминов, Е. А. Об актуальности фундаментализации математической подготовки студентов педагогических направлений в цифровую эпоху / Е. А. Перминов, Д. Д. Гаджиев, М. М. Абдуразаков // Образовательный и научный журнал. – 2019. – № 5(21). – С. 87–112. – DOI: 19.17853/1994-5639-2019-5-87-112. – Текст : непосредственный.
4. Абдуразаков, М. М. Аксиологическая цель и базовые аспекты фундаментальной подготовки преподавателя высшей школы в контексте информатизации профессиональной деятельности преподавателя SHS / М. М. Абдуразаков, С. В. Зенкина, О. Е. Шафранова // Веб-конференция. – 2016. – Vol. 29. – С. 1002. – Текст : непосредственный.
5. Монахов, В. М. Системный подход к методическому раскрытию прогностического потенциала образовательных стандартов / В. М. Монахов, С. А. Тихомиров // Ярославский педагогический вестник, Ярославский педагогический бюллетень. – 2016. – № 6. – С. 117–126 (In Russian) (Русский). – Текст : непосредственный.

6. Армони, М. Компьютерная дисциплина прокладывает путь к высшему обазованию. Израильский случай / М. Армони, Ж. Гал-Эзер // Компьютерное образование. – 2014. – Published online (опубликовано в компьтерной сети): 17 July 2014. – URL: http://dx.doi.org/10.1080/08993408.2014.936655. – Текст : электронный.
7. Макракис, В. Новая роль подготовленных учителей в новую эру : из опыта Объединенных Арабских Эмиратов. Программа ICT / В. Макракис // Труды Всеобщей 3-й греческой конференции по дидактике информатики. – Коринф, Греция, 2005. – Текст : непосредственный.
8. Наджафи, Х. МООС интеграция в школьные программы / Х. Наджафи, Р. Эванс, С. Федерико // Международное обозрение исследований в открытом и распределительном обучении (IRRODL). – 2014. – Vol. 15. – № 5. – URL: http://www.irrodl.org/index.php/irrodl/article/view/1861 – Текст : электронный.
9. Арепьев, Е. И. Домножественная реалистическая интерпретация онто-гносеологических основ математики / Е. И. Арепьев // Вопросы философии. – 2010. – № 7. – С. 84. – Текст : непосредственный.
10. Владимиров, Ю. С. Метафизика / Ю. С. Владимиров. – Москва : Лаборатория знания, 2009. – С. 514. – Текст : непосредственный.
11. Абдуразаков, М. Развитие потенциала и организационных умений в цифровой технологии в процессе общения студентов / М. Абдуразаков, Дж. Гаджиев, Н. Гусева, Г. Токмазов // Историческая и общественная образовательная идея. – 2019. – Т. 11. – № 2. – DOI: 10.17748/2075-9908-2019-11-2-00-00. – URL: http://www.hist.-edu.ru. – Текст : электронный.
12. Брунер, Ж. С. Культура образования / Ж. С. Брунер. – Кембридж : Масс Университет Гарварда, 2006. – 224 с. – Текст : непосредственный.
13. Кастелс М. Информационная эра: Экономика, общество и культура / М. Кастелс. – Москва : Information Age: SU HSE, 2000. –608 с. – Текст : непосредственный.
14. Коротенков, И. Г. Информационная среда в начальной школе : учебник / И. Г. Коротенков. – Москва : Академия IT., 2013. – С. 152. – Текст : непосредственный.

REFERENCES AND INTERNET RESOURCES

1. Abdurazakov, M. M. Sozdanie klassov elementarnyh funktsij v kompleksnyh modelyah obucheniya matematike v vysshej shkole (About creation of classes of elementary functions in complex model of training in mathematics in higher education institution) : doklad / M. M. Abdurazakov, Dzh. D. Gadzhiev, A. Z. Salakhov // Sbornik materialov IV Mezhdunarodnoj konferencii «Mnogomasshtabnoe modelirovanie struktur, stroenie veshchestva, nanomaterialy i nanotekhnologii» / pod obshch. red. V. A. Panina. – Dop. tom. – Tula : Tul. gos. ped. un-t im. L. N. Tolstogo. – 342 s.
2. Straud, K. A. Inzhenernaya matematika (Engineering Mathematics) / K. A. Straud. – 6-e izd. – New York : Industrial Press INC, 2007.
3. Perminov, E. A. Ob aktual’nosti fundamentalizacii matematicheskoj podgotovki studentov pedagogicheskih napravlenij v cifrovuyu epohu (On the relevance of the fundamentalization of mathematical training of pedagogical students in the digital age) / E. A. Perminov, D. D. Gadzhiev, M. M. Abdurazakov // Obrazovatel’nyj i nauchnyj zhurnal. – 2019. – № 5(21). – S. 87–112. – DOI: 19.17853/1994-5639-2019-5-87-112.
4. Abdurazakov, M. M. Aksiologicheskaya cel’ i bazovye aspekty fundamental’noj podgotovki prepodavatelya vysshej shkoly v kontekste informatizacii professional’noj deyatel’nosti prepodavatelya SHS (Axiological, goal and substantial aspects of lifelong learning of teacher at higher school in context of informatization of his professional activity SHS) / M. M. Abdurazakov, S. V. Zenkina, O. E. Shafranova // Veb-konferenciya. – 2016. – Vol. 29. – C. 1002.
5. Monakhov, V. M. Sistemnyj podhod k metodicheskomu raskrytiyu prognosticheskogo potenciala obrazovatel’nyh standartov (System approach to the methodological disclosure of the prognostic potential of educational standards) / V. M. Monakhov, S. A. Tikhomirov // Yaroslavskij pedagogicheskij vestnik. – 2016. – № 6. – C. 117–126.
6. Armoni, M. Komp’yuternaya disciplina prokladyvaet put’ k vysshemu obazovaniyu. Izrail’skij sluchai (High school computer science paves the way for higher education: the Israeli case) / M. Armoni, Zh. Gal-Ezer // Komp’yuternoe obrazovanie. – 2014. – Published online (opublikovano v komp’ternoi seti): 17 July 2014. – URL: http://dx.doi.org/10.1080/08993408.2014.936655.

7. Makrakis, V. Novaya rol' podgotovlennyh uchitelej v novuyu eru : iz opyta Ob'edinennyh Arabskih Emiratov. Programma ICT (Training teachers' new roles in the new era: experiences from the Unites Arab Emirates ICT Programme) / V. Makrakis // Trudy Vseobshchej 3-i grecheskoj konferencii po didaktike informatiki. – Korinf, Gretsiya, 2005.
8. Nadzhafi, Kh. MOOC integraciya v shkol'nye programmy (MOOC integration into secondary school courses) / Kh. Nadzhafi, R. Evans, S. Federiko // Mezhdunarodnoe obozrenie issledovanij v otkrytom i raspredelitel'nom obuchenii (IRRODL). – 2014. – Vol. 15. – № 5. – URL: http://www.irrodl.org/index.php/irrodl/article/view/1861.
9. Arep'ev, E. I. Domnozhestvennaya realisticheskaya interpretaciya onto-gnoseologicheskih osnov matematiki (Domnozhestvennaya realistic interpretation onto-gnoseological fundamentals of mathematics) / E. I. Arep'ev // Voprosy filosofii. – 2010. – № 7. – C. 84.
10. Vladimirov, Yu. S. Metafizika (Metaphysics) / Yu. S. Vladimirov. – Moskva : Laboratoriya znaniya, 2009. – C. 514.
11. Abdurazakov, M. Razvitie potenciala i organizacionnyh umenij v cifrovoj tekhnologii v processe obshcheniya studentov (The developmental potential and the organizational functions of IT-technology in the process of socialization of students) / M. Abdurazakov, Dzh. Gadzhiev, N. Guseva, G. Tokmazov // Istoricheskaya i obshchestvennaya obrazovatel'naya ideya. – 2019. – T. 11. – № 2. – DOI: 10.17748/2075-9908-2019-11-2-00-00. – URL: http://www.hist.-edu.ru.
12. Bruner, Zh. S. Kul'tura obrazovaniya (Culture of education) / Zh. S. Bruner. – Kembridzh : Mass Universitet Garvarda, 2006. – 224 s.
13. Kastels M. Informacionnaya era: Ekonomika, obshchestvo i kul'tura (Information Age: Economy, Society and Culture) / M. Kastels. – Moskva : Information Age: SU HSE, 2000. – 608 s.
14. Korotenkov, I. G. Informacionnaya sreda v nachal'noj shkole (Information educational environment of primary school) : uchebnik / I. G. Korotenkov. – Moskva : Akademiya IT., 2013. – S. 152.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Гаджиев Джаваншир Джебраилович, профессор математики, South Western College, Fort Myers, Florida. E-mail: Dgadjiev3@gmail.com

INFORMATION ABOUT AUTHOR

Dr. Gadjiev Djavanshir Dzhebrailovich, Professor of Mathematics, Florida Southwestern College, Mathematics Departments, Florida, USA. E-mail: Dgadjiev3@gmail.com