

Литература

1. Веснин В. Р. Практический менеджмент: пособие для кадровой работы. М.: Юристъ, 2016.
2. Ижбулатова О. В. Формирование и реализация кадровой стратегии предприятия // Управление персоналом. 2016. № 1.
3. Мильнер Б. З. Теория организации. М.: Инфра-М, 2008. 797 с.
4. Михайлов Я. В. Эффективный менеджмент: учебно-практическое пособие для управленческого персонала и лиц, изучающих менеджмент. М.: ГЕЛАН, 2016.
5. Могилевкин Е. А., Богдан Н. Н. Типы кадровой стратегии в современной организации // Персонал Микс. 2016. № 7 [Электронный ресурс]: URL: <http://www.ippnou.ru/print/003436/>
6. Самоукин А. И., Шишов А. Л. Теория и практика бизнеса: учебно-практическое пособие. М.: Деловая Литература, 2015. 311 с.

УДК 330.5.057.7

Дужински Рамзия Ризаевна, Торопцев Евгений Львович

ЗАДАЧА КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ДИНАМИЧЕСКОМ МЕЖОТРАСЛЕВОМ БАЛАНСЕ¹

Исследования проблемы устойчивости функционирования экономических систем по межотраслевым моделям связано с реализацией трудоемких в вычислительном отношении процедур оптимизации. Разрабатываемые для этого специальные функции качества строятся на основе решения полной проблемы собственных значений матрицы состояния системы. Для динамических межотраслевых балансов высокой размерности вычислительные затраты обычных современных компьютеров становятся труднопреодолимыми. Устранить такой недостаток, сократить объем вычислений позволяет двухэтапный вариант квадратичного программирования, рассмотренный в настоящей работе. Статья также посвящена определению алгоритмов квадратичного программирования, дающих гарантированный результат оптимизации за конечное число шагов.

Ключевые слова: оптимизация, задача квадратичного программирования, межотраслевой баланс.

Ramzia Duszynski, Evgeny Toroptsev THE PROBLEM OF QUADRATIC PROGRAMMING IN DYNAMIC INPUT-OUTPUT BALANCE

Research of the problem of sustainability of functioning of economic systems in input-output models is associated with the implementation of computationally labor-intensive optimization procedures. Special quality functions, developed for this purpose, are based on the solution of the full eigenvalue problem of the system state matrix. Computational cost of the conventional state-of-the-art computers is difficult to overcome for dynamic high-dimensional input-output balances. Therefore, this paper discusses a potential solution: a two-stage variant of the quadratic programming, which reduces the amount of computation. In addition, the article focuses on the definition of quadratic programming algorithms, that provide a guaranteed result of optimization in a finite number of steps.

Key words: optimization, quadratic programming problem, input-output balance.

Динамический межотраслевой баланс (МОБ) формализуется в нашей постановке (как и в [1]) матричным уравнением

$$(E - A)X(t) - BpX(p) = Y(t), \quad (1)$$

где $p = d/dt$ – символ дифференцирования по времени, A – матрица коэффициентов прямых производственных затрат, B – матрица коэффициентов приростных фондоемкостей, $Y(t)$ – вектор конечного спроса, $X(t)$ – вектор валовых выпусков по видам экономической деятельности (ВЭД), E – единичная

¹ Статья подготовлена при финансовой поддержке РГНФ, проект № 16-02-00091 «Моделирование и управление экономической динамикой сложных систем».

матрица, а вектор $BpX(p)$ характеризует скорость накопления / свертывания всех видов «капитала», пропорциональную изменению выпуска в разрезе ВЭД. Если статистика не предоставляет данных для вычисления элементов b_{ij} матрицы B , то ее можно заменить матрицей капитальных коэффициентов, не внося большой ошибки в модель и расчеты. Последнее означает, что для расчета b_{ij} можно использовать формулу

$$b_{ij} = \frac{S_{ij}}{X_j}, \quad (2)$$

где S_{ij} – стоимость капитала в текущих ценах, произведенного в ВЭД i и используемого в ВЭД j ; X_j – производственная мощность ВЭД j , т. е. стоимость его максимального выпуска в текущих ценах.

На основе модели (1) возможна постановка и решение многочисленных задач анализа и синтеза собственных динамических свойств (СДС) экономических систем, управления экономической динамикой, формирования экономической и инвестиционной политики. В свою очередь, решение каждой из комплекса указанных проблем и задач базируется на той или иной процедуре оптимизации, а здесь в числе ведущих расположен метод наименьших квадратов с линейными ограничениями-неравенствами.

Если строить модель (1) «от спроса» и положить, что валовые выпуски ВЭД этому спросу пропорциональны в соответствии с

$$Y(t) = QX(t), \quad (3)$$

в котором матрица Q определяется нормами трудоемкости и потребления, то модель (1) замыкается по потреблению, образуя задачу Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$pX(t) = B^{-1}(E - A - Q)X(t) = GX(t), \quad X(0) = X_0 \quad (4)$$

Проблема обращения матрицы B из-за ее вырожденности когда-то делала работу с моделью (1) невозможной, даже попытки работать с ней до нас никогда не предпринимались. Сама модель носила чисто теоретико-созерцательный характер: посмотрели, приняли к сведению – и прошли мимо. Нами решение этой проблемы найдено, опубликовано¹, и мы не станем здесь его повторять.

Варьируемые параметры оптимизационной задачи могут принадлежать матрицам A , B , Q размерности $(n \times n)$, а теоретическая длина вектора этих параметров $\bar{k}$ может достигать $3n^2$ элементов. Практически выбор состава вектора $\bar{k}$ осуществляется на основе достижения компромисса между экономической целесообразностью и численными оценками чувствительности вещественных частей собственных значений α_i матрицы G к отдельным элементам $\bar{k}$ по формуле [2]:

$$s_{ij} = \frac{\partial \alpha_i}{\partial k_j} = \operatorname{Re} \frac{\partial \lambda_i}{\partial k_j} = \operatorname{Re} \frac{V_i^T \frac{\partial G}{\partial k_j} U_i}{V_i^T U_i}, \quad (5)$$

где $\lambda_i = \alpha_i \pm j\omega_i$ – собственные значения матрицы G ; V_i, U_i – ее левые и правые собственные векторы, а матрицы $\partial G / \partial k_j$ в формуле (5) строятся по формулам численного дифференцирования:

$$\frac{\partial G}{\partial k_j} \approx \frac{G(k_j + \Delta k_j) - G(k_j)}{\Delta k_j}. \quad (6)$$

Заметим, что после того, как вектор $\bar{k}$ определен, основное уравнение модели принимает вид

$$pX(t) = G(\bar{k}) \cdot X(t). \quad (7)$$

Продуктивность модели (7), декременты и инкременты затухания отдельных составляющих движения, их наблюдаемости, управляемости и чувствительности определяются собственными числами и собственными векторами матрицы G . В спектре собственных значений G , если экономика

1 Дужински Р., Торопцев Е. Л. Оценка влияния инвестиционных проектов на экономический рост // Региональная экономика. Теория и практика. 2015. № 14(389). С. 16–28.

растет, содержится одно положительное собственное значение, которому соответствует положительный собственный вектор. Пусть это будет $\lambda = \alpha_f$, и назовем его корнем Фробениуса, памятуя известную теорему из линейной алгебры. Отсутствие корня Фробениуса означает отсутствие способности экономики к расширенному воспроизводству, неудовлетворительную ее структуру, в которой невозможен самовоспроизводящийся экономический рост. Таким образом, понятной становится цель и одна из главных задач математической оптимизации в экономике в рамках структурных моделей.

Для решения многочисленных задач устойчивости экономических систем по межотраслевым моделям возможна постановка и решение задачи целенаправленного смещения в комплексной плоскости группы собственных значений λ_i матрицы G . Такая возможность полностью автоматизирована в разработанном нами программном комплексе СТАТУС¹. Комплекс содержит набор методов численного поиска, которые на каждом шаге вычисляют функционал качества переходных процессов, строящийся по группе собственных значений λ_i . Это значит, что на каждом шаге оптимизации должна решаться полная проблема собственных значений матрицы G , что и делает СТАТУС на основе реализации QR-алгоритма [2]. Но вычислительные затраты этого алгоритма пропорциональны кубу размерности матрицы G . А если рассматривать совокупность режимов функционирования экономики, описываемую набором таких матриц и при этом иметь дело с высокоразмерными моделями МОБ, то трудоемкость решения задачи, во всяком случае для современных ноутбуков, непреодолимо возрастает. В настоящей работе мы рассмотрим альтернативный путь оптимизации.

Если вектор α содержит вещественные части собственных значений матрицы G , а $\Delta\bar{\alpha}$ – вектор их желаемых приращений, то в рамках модели линейного приближения получим систему

$$S\Delta\bar{k} = \Delta\bar{\alpha}, \quad (8)$$

где S – матрица чувствительностей, элементами которой являются коэффициенты чувствительности, вычисляемые по формуле (5); $\Delta\bar{k}$ – вектор приращений варьируемых параметров, вычисление которого из (8) не представляет затруднений.

Если равенство (8) выполняется приближенно, то это позволяет сформулировать следующую задачу квадратичного программирования (ЗКП) с линейными ограничениями-неравенствами:

$$\begin{aligned} \|S\Delta\bar{k} - \Delta\bar{\alpha}\| &\rightarrow \min \\ \Delta k_{i,\min} &\leq \Delta k_i \leq \Delta k_{i,\max}, \quad i = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (9)$$

Задача (9) в ряде случаев может иметь более одного решения. Тогда нас должно интересовать то, которое дает $\|\Delta\bar{k}\| \rightarrow \min$ при неотрицательных компонентах и тем самым повышает точность аппроксимации (8). То есть мы обращаемся к еще одной ЗКП, имеющей вид

$$\begin{aligned} \|\Delta\bar{k}\| &\rightarrow \min, \quad S\Delta\bar{k} \geq \Delta\bar{\alpha} \\ \Delta k_{i,\min} &\leq \Delta k_i \leq \Delta k_{i,\max}, \quad i = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (10)$$

и получаем двухэтапную процедуру одного шага рассматриваемого алгоритма.

Решение ЗКП (9), (10) давно и успешно формализовано и вычислительная математическая среда MATLAB содержит соответствующие модули [3–9]. Например, к наиболее распространенным относится алгоритм SQP – Sequential quadratic programming, последовательно реализующий решение ЗКП (9), когда на каждом шаге для нее формируется в качестве аппроксимирующей задачи, использующей представление квадратичной функции (9) рядом Тейлора, а именно:

$$\begin{aligned} f(\Delta\bar{k}) &= \|S\Delta\bar{k} - \Delta\bar{\alpha}\| \rightarrow \min \\ f(\Delta\bar{k}) &= \frac{1}{2} \Delta\bar{k}^T H \Delta\bar{k} + z^T \Delta\bar{k}, \\ \text{если } S\Delta\bar{k} &\geq \Delta\bar{\alpha}. \end{aligned} \quad (11)$$

¹ Торопцев Е. Л., Гурнович Т. Г. Программа анализа статической устойчивости и оптимизации режимов функционирования макроэкономических систем, представленных динамическими моделями МОБ Леонтьева (СТАТУС). Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2004610286 от 27.01.2004 г. Москва, Роспатент.

Таким образом, задача (11) решается многократно.

Данная постановка задачи задает процедуру последовательного квадратичного программирования, механизм которого подробно описан в [10]. В соответствии с [10, 11] ограничения в (11) называются активными, или сдерживающими, если в соответствующих строках системы нестрогих неравенств (11) выполняется равенство. Неактивные ограничения образуют неактивное множество, образуемое строками системы неравенств (11), для которых эти неравенства строгие. При этом известно, что множество алгоритмов решения задачи (11) определяется в основном вариантами перевода активных ограничений в неактивные вплоть до достижения минимума. Ряд алгоритмов доведен до стандартизованных программных продуктов [11–13].

Экономические исследования доставляют многочисленные задачи математического программирования (исследования операций) и эконометрики, требующие применения метода наименьших квадратов. Как показывает анализ публикаций, алгоритмы метода сравниваются по эффективности на модельных задачах и специально построенном наборе тестовых примеров, а строгие доказательства сходимости и иные оценки вычислительной эффективности отсутствуют [10–14]. Здесь приятным исключением является работа [11], в которой для линейной задачи о наименьших квадратах с линейными ограничениями-неравенствами (в [11] это алгоритм NNLS) представлены как детализированный алгоритм решения, так и математически строгая оценка его сходимости.

В обсуждаемых оптимизационных задачах приходится иметь дело со многими варьируемыми параметрами, поэтому в рамках межотраслевой оптимизации представляют интерес методы, выводящие из активного множества много параметров на каждом шаге. Обоснованное использование таких процедур повышает эффективность процесса численного поиска. Поэтому нам важно уточнить количество элементов, которое на одном шаге обоснованно может быть переведено из активного множества в неактивное.

В контексте наших рассуждений следует обратить внимание на алгоритм GPCG из [12]. Он, в отличие от большинства известных, реализует эвристическую процедуру одновременного вывода из активного множества многих параметров на каждом шаге оптимизации. Использование некоторого объема априорной информации об экономике анализируемой системы и интуиции исследователя позволяет надеяться на успех выбора правильной стратегии поиска в условиях большой длины вектора варьируемых параметров. Если бы наша надежда оказалась обоснованной хотя бы для задачи (9), дополненной условием неотрицательности переменных, то эффективность процедуры оптимизации возросла бы.

Итак, рассмотрим частный случай задач (9), (11) в виде

$$\min_x \|Cz - f\|, \quad z \geq 0, \quad z \in R^N, \quad f \in R^M \quad (12)$$

где размерности матрицы C равна $M \times N$, а $M > N$.

В приводимом ниже алгоритме используем следующие обозначения для множеств индексов, в которых значения целого типа пробегает от 1 до N : $\mathfrak{Z}$ и $\mathfrak{R}$. Элементы вектора z , индексированные множеством $\mathfrak{Z}$ и принадлежащие активному множеству, равны нулю. В свою очередь, ненулевые элементы z , образующие неактивное множество, индексируются во множестве $\mathfrak{R}$. Тогда, обращаясь к работе [13], алгоритм решения задачи (12) детализируется следующим образом.

Шаг 1. Выполнить: $\mathfrak{R} := \emptyset$, $\mathfrak{Z} := \{1, 2, \dots, N\}$, $z := 0$.

Шаг 2. Вычислить вектор $w := C^T(f - Cz)$.

Шаг 3. Если $\mathfrak{Z}$ – пустое множество или $w_j \leq 0 \quad \forall j \in \mathfrak{Z}$, то STOP.

Шаг 4. Найти индекс t из $\mathfrak{Z}$, для которого $w_t = \max\{w_j : j \in \mathfrak{Z}\}$.

Шаг 5. Индекс t переместить из $\mathfrak{Z}$ в $\mathfrak{R}$.

Шаг 6. Формируем матрицу C_p по правилу: её j -й столбец равен j -му столбцу матрицы C , если $j \in \mathfrak{R}$, и столбец обнуляется, если $j \in \mathfrak{Z}$. Решить задачу о наименьших квадратах $C_p v \equiv f$, которая определяет только элементы вектора v для которых $j \in \mathfrak{R}$, а остальные элементы полагаются нулевыми.

Шаг 7. Если отличные от нуля элементы v положительны, то присвоить $z := v$ и перейти к шагу 2.

Шаг 8. Для всех $j \in \mathfrak{R}$, для которых $v_j \leq 0$ найти такой индекс $q \in \mathfrak{R}$, что

$$\frac{z_q}{z_q - v_q} = \min \left\{ \frac{z_j}{z_j - v_j} \right\}.$$

Шаг 9. Вычислить

$$\beta = \frac{z_q}{z_q - v_q}.$$

Шаг 10. Вычислить $z := z + \beta(v - z)$.

Шаг 11. $\forall j \in \mathfrak{R}$, для которых $z_j = 0$, переместить из $\mathfrak{R}$ в $\mathfrak{Z}$ и перейти к шагу 6.

Шаг 12. СТОП.

Результатом работы приведенного алгоритма являются вектор z и двойственный ему вектор w . Эти векторы определяют координаты седловой точки функции Лагранжа, то есть удовлетворяют условиям известной в выпуклом программировании теоремы Куна – Таккера, дающей необходимые и достаточные того, что вектор z является решением задачи (12).

Шаги с номерами 4–6 рассмотренного алгоритма являются ключевыми с точки зрения его сходимости. Они определяют номер элемента t (Шаг 4), еще не содержащегося во множестве $\mathfrak{R}$. Этот элемент обязательно будет положительным, если ввести его в решение. Здесь важно, что указанный ввод в решение – это ввод только одного его элемента. И в [13] доказана теорема о гарантированной сходимости алгоритма при вводе в решение именно одной компоненты на одном шаге. Приводить эту теорему мы здесь не будем, отметив очевидную сходимость алгоритма, поскольку каждый его шаг сокращает число «свободных» индексов во множестве $\mathfrak{R}$, которое само содержит конечное число элементов.

Как нами уже отмечалось, многие программные продукты, успешно решающие ЗКП с линейными ограничениями-неравенствами в общем виде, не поддерживаются строгими оценками сходимости и иной эффективности реализуемых алгоритмов. Среди таких алгоритмов имеются OPROG из [12], BVLS из [13] а также включенный в MATLAB алгоритм QP [3–9,10], которые на каждом шаге, аналогично представленному методу, выполняют перевод из активного множества в неактивное только одной переменной. В свою очередь, алгоритм GPCG из [11] на каждом шаге выполнения работает со многими параметрами, но носит эвристический характер.

Нас интересует вопрос, возможен ли гарантированный перевод из активного множества в неактивное многих параметров на одном шаге в нашей многопараметрической межотраслевой задаче хотя бы для случая (12)? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема. Пусть A – матрица размерности $M \times N$ ранга N , ω_1, ω_2 – скалярные величины, а b – вектор размерности M . Все числа вещественные и выполнено равенство, в правой части которого отличны от нуля только два последних элемента вектора:

$$A^T b = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}, \quad \omega_1, \omega_2 > 0 \quad (13)$$

При этом

$$(Ax - b, Ax - b) \rightarrow \min, \quad (14)$$

то есть вектор x есть решение ЗКП (14). Тогда x_{N-1}, x_N – два последних элемента вектора x могут не быть одновременно положительными.

Доказательство. Положим Q – ортогональная $(M \times M)$ матрица, умножением на которую матрицы A слева в результате обнуляются поддиагональные элементы в первых $(N-2)$ -х столбцах:

$$Q \cdot A = \begin{pmatrix} P & \chi \\ 0 & \phi \end{pmatrix}. \quad (15)$$

В (15) P – верхняя треугольная $(N-2) \times (N-2)$ матрица, а χ и ϕ – матрицы размерности $(N-2) \times 2$ и $(M-N+2) \times 2$ соответственно. Ясно, что матрица P невырожденная, ведь ранг A равен N .

Введем в рассмотрение векторы u и v , определяемые из (16):

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = Q \cdot b, \quad u \in R^{N-2}, \quad v \in R^{M-N+2} \quad (16)$$

Из (15) следует, что

$$(Q \cdot A)^T = A^T \cdot Q^T = \begin{pmatrix} P^T & 0 \\ \chi^T & \phi^T \end{pmatrix}, \quad (17)$$

А с учетом (16) выражение (13) приводится к виду

$$A^T \cdot b = (A^T \cdot Q^T)(Q \cdot b) = \begin{pmatrix} P^T & 0 \\ \chi^T & \phi^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^T u \\ \chi^T u + \phi^T v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Из формулы (18) немедленно следует, что $u = 0$, а

$$\phi^T v = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}; \quad \omega_1, \omega_2 > 0.$$

Теперь рассмотрим ЗКП. Вектор x представим в виде

$$x = \begin{pmatrix} x^* \\ x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix}, \quad x^* \in R^{N-2} \quad (19)$$

для решения этой задачи, и она с учетом $u = 0$ примет вид:

$$\begin{aligned} (Ax - b, Ax - b) &= (Q(Ax - b), Q(Ax - b)) = \\ &= \begin{pmatrix} Px^* + \chi \begin{pmatrix} x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} \\ \phi \begin{pmatrix} x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} - v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Px^* + \chi \begin{pmatrix} x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} \\ \phi \begin{pmatrix} x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} - v \end{pmatrix} \rightarrow \min \end{aligned} \quad (20)$$

Это исходная задача, а из условия

$$\left((Px^*) + \chi \begin{pmatrix} x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix}, Px^* + \chi \begin{pmatrix} x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} \right) \rightarrow \min \quad (21)$$

следует вектор

$$x^* = -P^{-1} \chi \begin{pmatrix} x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix}, \quad (22)$$

а условие

$$\left(\phi \begin{pmatrix} x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} - v, \phi \begin{pmatrix} x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} - v \right) \rightarrow \min \quad (23)$$

определяет выражение для вычисления двух последних компонент вектора x :

$$\begin{pmatrix} x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T \cdot v = (\phi^T \phi)^{-1} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

При этом симметричная матрица $(\phi^T \phi)^{-1}$ имеет размерность (2×2)

$$(\phi^T \phi)^{-1} = \begin{pmatrix} a & \theta \\ \theta & b \end{pmatrix},$$

а ее элементы могут принимать произвольные значения. Тогда даже выполнение условия $\omega_1, \omega_2 > 0$ не гарантирует выполнения условия $x_{N-1}, x_N > 0$. Теорема доказана.

Таким образом, вывод из активного множества одновременно многих параметров для повышения вычислительной эффективности процедуры минимизации при решении общей ЗКП невозможен. Гарантированно можно на одном шаге оптимизации динамических свойств экономических систем выводить из активного множества только одну переменную. Применение процедур типа GPCG при решении широкого круга задач устойчивости по межотраслевым моделям выигрыша в вычислительных затратах не гарантирует.

Литература

1. Леонтьев В. В. Экономическое эссе. Теории, исследования, факты и политика. М.: Политическая литература, 1990. 415 с.
2. Wilkinson J. H. The algebraic Eigenvalue Problem. OXFORD: Clarendon Press, 1965. 564 p.
3. Мартынов Н. Н., Иванов А. П. MATLAB 5.X. Вычисления, визуализация, программирование. М.: Кудиц-образ, 2000. 336 с.
4. Дьяконов В. П., Абраменкова И. В. MATLAB 5.0/5.3. Система символьной математики. М.: Нолидж, 1999. 640 с., ил.
5. Говорухин В., Цибулин В. Компьютер в математическом исследовании: учебный курс. СПб.: Питер, 2001. 624 с., ил.
6. Глушаков С. В., Жакин И. А., Хачиров Т. С. Математическое моделирование: Mathcad 2000, MATLAB 5: учебный курс. Харьков: Фолио, 2001. 524 с.
7. Мартынов Н. Введение в MatLab 6. М.: Кудиц-образ, 2002.
8. Дьяконов В. Matlab6: учебный курс. СПб.: Питер, 2001.
9. Потемкин В. Введение в MATLAB. М.: Диалог-МИФИ, 2000.
10. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация / пер. с англ. М.: Мир, 1985. 509 с.
11. More J. J., Toraldo G. Algorithm for bound constrained quadratic programming problems // Numer. Math. 1989. Vol. 43. No. 3. P. 377–400.
12. Goldfarb D., Idnani A. A numerically stable dual method for solving strictly convex quadratic programs // Math. Programming. 1983. Vol. 27. P. 1–33.
13. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач методом наименьших квадратов / пер. с англ. М.: Наука, 1986. 232 с.
14. Зимницкий В. А., Устинов С. М. Методы анализа математических моделей динамических систем. Л.: ЛГТУ, 1991. 81 с.