

Снежный покров невысок – 15–20 см. Снег появляется в среднем 21 ноября, а сходит – 28 марта. Устойчивый снежный, по многолетним данным, покров держится с 17 декабря по 13 марта. Но случаются годы без устойчивого снежного покрова. Снег эпизодически выпадает и вскоре стаивает.

Годовой ход температуры соответствует континентальному типу: с минимумом в январе и максимумом в июле месяце. Амплитуда средних суточных температур воздуха составляет 25° , абсолютных температур – 75° . 272 дня температуры воздуха в Ставрополе выше 0° , 222 дня – выше 5° , 179 дней – выше 10° , 129 дней выше 15° и 61 день – выше 20° ; 93 дня температуры ниже 0° .

Учитывая все вышесказанное логично утверждать, что применение солнечных прудов для получения тепловой и электрической энергии на территории Ставропольского края возможно и целесообразно.

Для практической реализации поставленной задачи на кафедре теплоснабжения и экспертизы недвижимости Северо-Кавказского федерального университета разработан проект экспериментального стенда. По своим габаритам ($5 \text{ м} \times 3 \text{ м} \times 3 \text{ м}$) он аналогичен экспериментальному солнечному пруду, созданному в Бет-ха-Араве (Израиль) на берегу Мертвого моря. В качестве пруда-накопителя предлагается использовать наземный бассейн, стены и днище которого выполнены из обладающего малым коэффициентом теплопроводности пенополистирола. На стенде предусмотрена возможность измерения градиентов температур и концентрации соли в растворе, а также количество тепла, воспринятого теплообменником в бассейне и отданного отопительным приборам. Проект получил одобрение в Министерстве энергетики, промышленности и связи Ставропольского края. Результаты экспериментов, проведение которых планируется в 2013–2014 годах, лягут в основу практической реализации преобразования солнечной энергии в тепловую и электрическую с помощью солнечных соляных прудов.

Литература

1. Трушин С. Г., Зенкова И. А. О проблемах создания электростанций на базе солнечных прудов // Энергетическое строительство 1990. № 1. С. 19–22.
2. Осадчий Г. Б. Солнечная энергоустановка для горной местности // Промышленная энергетика. 1998. № 1.
3. Осадчий Г. Б. Солнечная энергия, её производные и технологии их использования (Введение в энергетику ВИЭ). Омск: ИПК Макшеевой Е. А., 2010. 572 с.
4. Попель О. С., Сони́на Н. М., Яскин Л. А., Зенкова И. А. Перспективы строительства опытно-промышленного солнечного пруда в Крыму.

УДК 620.9

**Гейбатов Руслан Аликович, Стоянов Николай Иванович,
Гейвандов Иоганн Арестогесович**

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ТЕПЛОВЫЕ ПОТОКИ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУР В МАССИВЕ ГРУНТА ВОКРУГ ПЕТРОТЕРМАЛЬНОЙ СКВАЖИНЫ

В статье показано применение метода конечных разностей для решения дифференциальных уравнений; суть метода сводится к замене непрерывной области совокупностью изолированных точек. Тепловые потоки в грунте можно разделить на вертикальные и радиальные, в связи с этим предлагаются две соответствующие расчетные схемы с соответствующими уравнениями.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, тепловой поток, распределение температур, метод конечных разностей, конечно-разностная схема.

Geybatov Ruslan Alikovich, Stoyanov Nikolay Ivanovich, Geyvandov Johann Arestogesovich
THE METHOD OF DIFFERENTIAL EQUATIONS SOLVING DESCRIBING HEAT FLOW
RATES AND TEMPERATURE DISTRIBUTION IN SOIL AROUND A PETRO-THERMAL WELL

The finite-difference method was used for differential equation solving. Heat flows can be divided into vertical and radial-type, thereby two relevant design diagrams with equations are suggested.

Key words: differential equation, heat flow, temperature distribution, finite-difference method, finite-difference scheme.

Расширение математического образования резко увеличило возможности построения и исследования математических моделей. Все чаще результаты расчетов позволяют обнаруживать и предсказывать ранее никогда не наблюдавшиеся явления, это дает основания говорить о математи-

ческом эксперименте. В некоторых исследованиях доверие к результатам численных экспериментов так велико, что в расхождении между результатами расчетов и экспериментов в первую очередь ищут погрешность в результатах экспериментов.

Требование численного решения новых задач привело к появлению большого количества новых методов. Наряду с этим последние полвека происходило интенсивное теоретическое переосмысление и старых методов, а также систематизация всех методов. Эти теоретические исследования оказывают большую помощь при решении конкретных задач.

Основным способом численного решения уравнений в частных производных является метод конечных разностей, заключающийся в аппроксимации производных конечными разностями. Вариантов такой аппроксимации одного и того же уравнения может быть несколько. В зависимости от выбранного шаблона получаются те или иные разностные схемы. В любом случае для получения сеточного решения приходится решать систему линейных или нелинейных алгебраических уравнений, аппроксимирующих исходное дифференциальное уравнение.

Основой метода конечных разностей является дискретизация – замена непрерывной области совокупностью изолированных точек (сеткой), причем решение уравнений ищется лишь в этих точках (узлах сетки).

В первую очередь при использовании метода конечных разностей надо стремиться к правильной аппроксимации уравнений поставленной задачи, а затем выбрать «наилучшую» схему, то есть оптимизировать ее, учитывая ее точность, экономичность, удобство программной реализации на ЭВМ и т. д.

Решение системы дифференциальных уравнений с частными производными можно значительно упростить применением хорошо построенной расчетной сетки. Верно и другое, что расчет на сетке, не очень хорошо соответствующей данной задаче, может дать неудовлетворительный результат [1–4].

Извлечение петротермальной энергии осуществляется по способу [5].

Дифференциальное уравнение нестационарной теплопроводности в цилиндрическом массиве грунта имеет вид:

$$\frac{\partial t_{zp}^{cp}}{\partial \tau} = -a \left(\frac{\partial^2 t_{zp}^{cp}}{\partial z_{zp}^2} + \frac{\partial^2 t_{zp}^{cp}}{\partial r^2} \right), \text{Вт.} \quad (1)$$

Величины тепловых потоков в грунте у поверхности наружной трубы скважины определяют по уравнениям:

$$\begin{cases} Q_r = \lambda \cdot 2\pi \cdot \frac{\partial t}{\partial r} \cdot r \cdot dz_{zp}, \text{Вт}, \\ Q_z = \lambda \cdot \frac{\partial t}{\partial z_{zp}} \cdot r \cdot dr, \text{Вт}, \end{cases} \quad (2)$$

где $t_{zp,j}^{cp} = f(r_{zp})$ – переменная температура грунта; $t_{zp,j}^{cp}$ меняется от $t_{zp,j}^{cp} = t_{2\theta_{i,j}}^{cp}$ при $r_{zp} = r_4$ до $t_{zp,j}^{cp} = t_{zp,0}^{cp} - \Delta t_3$ при $r_{zp} = r_{вл}$.

Решение уравнения (1) для определения распределения температур в массиве грунта вокруг скважины и величин Q_r и Q_z в явном виде невозможно. Поэтому поставленная задача решается методом последовательного приближения с применением конечно-разностных схем (рис. 2, 3) [6–8].

При исследовании процессов теплообмена в массиве грунта вокруг скважины и в самой скважине мы рассекаем её плоскостями по горизонтали, как показано на рис. 1, где 1 – массив грунта; 2 – петротермальная скважина.

На рис. 2 представлена принятая конечно-разностная схема по координатам $R-\tau$ для расчетного участка i , где ΔR – конечное приращение относительного радиуса цилиндрического слоя грунта вокруг трубопровода; m – число равных конечных приращений, на которые разбивается текущий радиус цилиндрического слоя грунта вокруг трубопровода.

По условиям задания r величина m меняется от $m = 1 + r_4$ до $m = m_{вл}$ при $r_{zp} = r_{вл}$. При этом $r = m$; $\Delta \tau$ – конечное приращение текущего времени; $\tau_j = j \cdot \Delta \tau$ – текущее время рассчитываемо-

го этапа процесса нестационарной теплопроводности; j – число равных конечных отрезков времени ($\Delta\tau$), отсчитываемое от $\tau = 0$ до τ_i ; $t_{i,m,j} = t_{cp,i,m,j}^{cp}$ при $r = m$ – текущая переменная температура грунта в момент времени j на текущем радиусе $r = m$ для расчетного участка i .

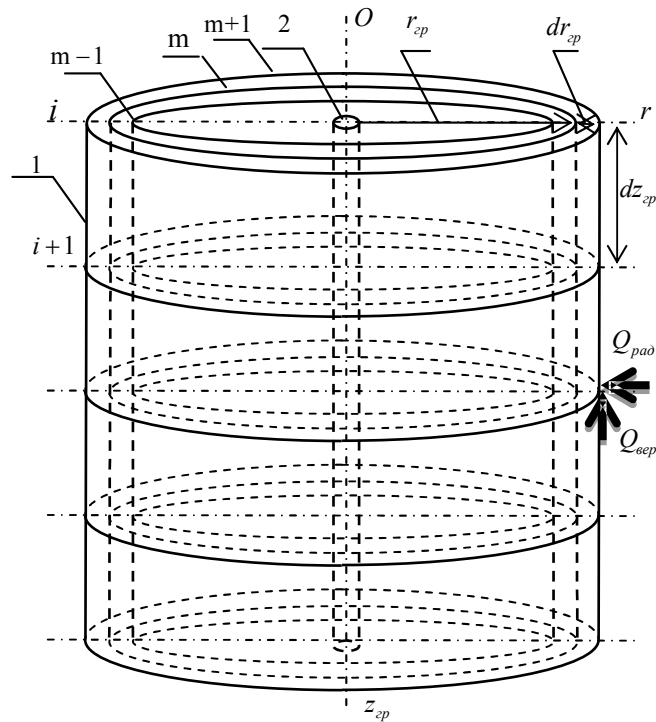


Рис. 1. Расчётная схема массива грунта вокруг скважины

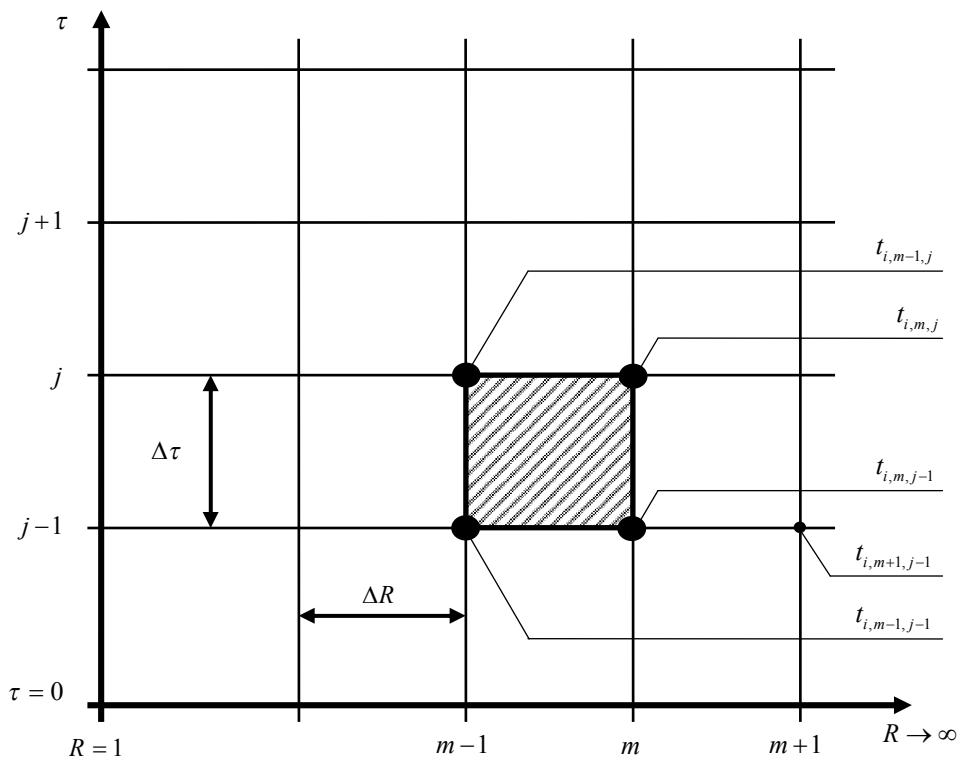


Рис. 2. Конечно-разностная схема по координатам $R - \tau$ для расчетного участка i

На рис. 3 представлена принятая конечно-разностная схема по координатам $z_{cp} - \tau$ для расчетного радиуса m , где Δz_{cp} – конечное приращение глубины петротермальной скважины; i – число равных конечных приращений, на которые разбивается глубина петротермальной скважины.

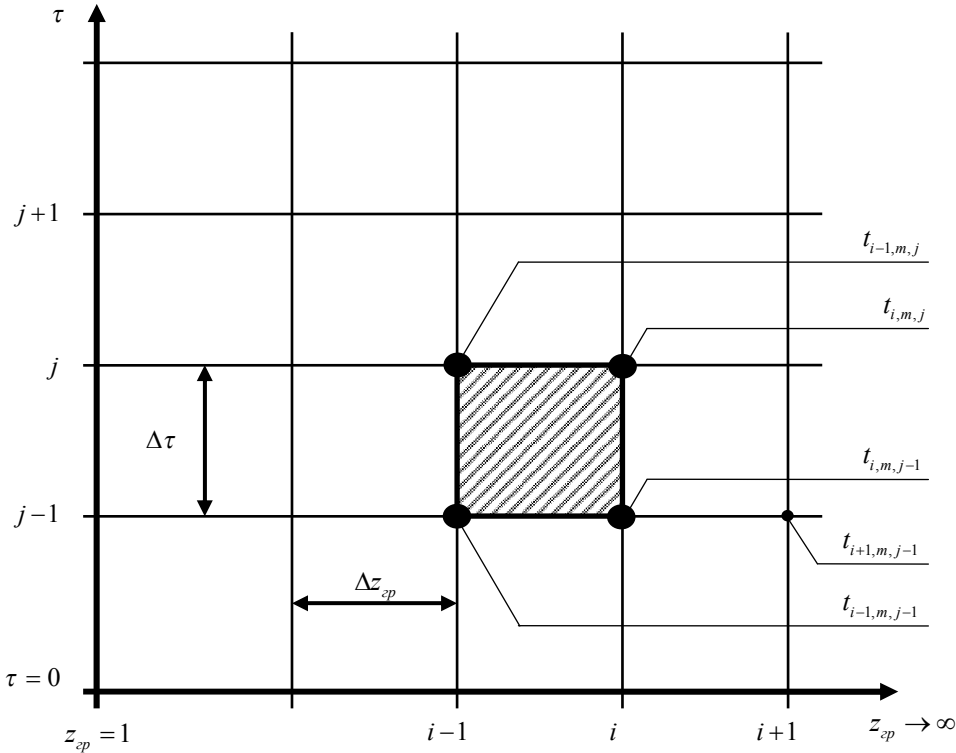


Рис. 3. Конечно-разностная схема по координатам $z_{cp} - \tau$ для расчетного радиуса m

Численные значения производных температуры грунта по времени j и по радиусу R_m :

- производная температуры по времени τ для данного радиуса R_m

$$\frac{\partial t_{cp}^{\tau}}{\partial \tau} = \frac{t_{i,m,j-1} - t_{i,m,j}}{\Delta \tau}; \quad (3)$$

- производная температуры грунта по радиусу R

$$\frac{\partial t_{cp}^r}{\partial r} = \frac{\Delta t_{i,m,j-1}^r}{\Delta r} = \frac{t_{i,m+1,j-1} - t_{i,m,j-1}}{\Delta r}; \quad (4)$$

- вторая производная температуры грунта по радиусу R

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 t_{cp}^r}{\partial r^2} = \frac{\Delta^2 t_{i,m,j-1}^r}{\Delta r^2} = \frac{(t_{i,m+1,j-1} - t_{i,m,j-1}) - (t_{i,m,j-1} - t_{i,m-1,j-1})}{\Delta r^2}, \\ \frac{\Delta^2 t_{i,m,j-1}^r}{\Delta r^2} = \frac{\Delta t_{i,m,j-1}^r - \bar{\Delta} t_{i,m-1,j-1}^r}{\Delta r^2}. \end{cases} \quad (5)$$

В приведенных уравнениях приняты следующие обозначения приращения температуры:

$$\begin{cases} \Delta t_{i,m,j}^{\tau} = t_{i,m,j-1} - t_{i,m,j}; \Delta t_{i,m,j-1}^r = t_{i,m+1,j-1} - t_{i,m,j-1}; \\ \bar{\Delta} t_{i,m-1,j-1}^r = t_{i,m,j-1} - t_{i,m-1,j-1}. \end{cases} \quad (6)$$

Численные значения производных температуры грунта по времени j и по высоте z_{cp} :

- производная температуры грунта по высоте Z

$$\frac{\partial t_{cp}^Z}{\partial z_{cp}} = \frac{\Delta t_{i,m,j-1}^Z}{\Delta z_{cp}} = \frac{t_{i+1,m,j-1} - t_{i,m,j-1}}{\Delta z_{cp}}; \quad (7)$$

• вторая производная температуры грунта по высоте Z

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 t_{\text{гр}}^{\text{cp}}}{\partial z_{\text{гр}}^2} = \frac{\Delta^2 t_{i,m,j-1}^z}{\Delta z_{\text{гр}}^2} = \frac{(t_{i+1,m,j-1} - t_{i,m,j-1}) - (t_{i,m,j-1} - t_{i-1,m,j})}{\Delta z_{\text{гр}}^2}, \\ \frac{\Delta^2 t_{i,m,j-1}^z}{\Delta z_{\text{ep}}^2} = \frac{\Delta t_{i,m,j-1}^z - \bar{\Delta} t_{i-1,m,j}^z}{\Delta z_{\text{ep}}^2}. \end{cases} \quad (8)$$

В приведенных уравнениях приняты следующие обозначения приращения температуры:

$$\Delta t_{i,m,j-1}^z = t_{i+1,m,j-1} - t_{i,m,j-1}; \bar{\Delta} t_{i-1,m,j}^z = t_{i,m,j-1} - t_{i-1,m,j}. \quad (9)$$

Подставляя полученные численные значения производных и обозначения разности температур грунта в уравнение (1):

$$\Delta t_{i,m,j}^{\tau} = -a \cdot \Delta \tau \left(\frac{\Delta t_{i,m,j-1}^z - \bar{\Delta} t_{i-1,m-1,j}^z}{\Delta z_{\text{гр}}^2} + \frac{\Delta t_{i,m,j-1}^r - \bar{\Delta} t_{i,m-1,j}^r}{\Delta r^2} \right). \quad (10)$$

Преобразуем уравнение (10) с учетом обозначений (6), (9) в расчетное уравнение:

$$t_{i,m,j} = t_{i,m,j-1} + a \cdot \Delta \tau \cdot \left(\frac{t_{i+1,m,j-1} - 2t_{i,m,j-1} + t_{i-1,m,j}}{\Delta z_{\text{гр}}^2} + \frac{t_{i,m+1,j-1} - 2t_{i,m,j-1} + t_{i,m-1,j}}{\Delta r^2} \right), \quad (11)$$

которое после соответствующих преобразований будет иметь вид:

$$t_{i,m,j} = t_{i,m,j-1} + M \cdot \left(\frac{t_{i+1,m,j-1} - 2t_{i,m,j-1} + t_{i-1,m,j}}{\Delta z_{\text{гр}}^2} + \frac{t_{i,m+1,j-1} - 2t_{i,m,j-1} + t_{i,m-1,j}}{\Delta r^2} \right), \quad (12)$$

где $M = a \cdot \Delta \tau$ – постоянный коэффициент.

Подставляя принятые выше обозначения в уравнения (2):

$$\begin{cases} Q_{r,i,j}^{\text{cp}} = \lambda \cdot 2\pi \frac{t_{i,m+1,j-1} - t_{i,m,j-1}}{\Delta r} \cdot r \cdot \Delta z_{\text{гр}}, \text{ Вт}, \\ Q_{z,i,j}^{\text{cp}} = \lambda \cdot \frac{t_{i+1,m,j-1} - t_{i,m,j-1}}{\Delta z_{\text{ep}}} \cdot r \cdot \Delta r, \text{ Вт}. \end{cases} \quad (13)$$

Разработанную математическую модель следует перенести на ПЭВМ, то есть создать компьютерную программу, позволяющую проводить виртуальные опыты и исследования. Данная компьютерная программа должна обладать рядом свойств, а именно: точностью расчетов; высокой производительностью; простым и удобным для пользователя интерфейсом; универсальностью.

Универсальность компьютерной программы, которая должна представлять собой, по сути, инструмент для исследований, позволяет учитывать множество факторов, так необходимых для изучения температурных полей петротермальных скважин.

Однако разработанная математическая модель нуждается в проверке, средством проверки математической модели должен послужить эксперимент.

Литература

1. Боглаев Ю. П. Вычислительная математика и программирование. М.: Высш. шк., 1990. 543 с.
2. Власова Е. А., Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н. Приближенные методы математической физики. М.: Изд-во МГТУ им Н. Э. Баумана, 2001. 700 с.
3. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
4. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980. 536 с.
5. Пат. 2288413 Российская Федерация, С1, МПК F24J 3/08. Способ извлечения геотермального тепла / Н. И. Стоянов, А. И. Воронин, И. А. Гейвандов – 2005113114/06; Заявлено 29.04.05; Опубл. 27.11.06, Бюл. 33. Патентообладатель ГОУ ВПО «Северо-Кавказский государственный технический университет».
6. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 614 с.
7. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973. 415 с.
8. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 429 с.
9. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Лаборатория базовых знаний, 2000. 624 с.