4. Николаев В. Стратегия развития инвестиционной и инновационной деятельности, туризма в Ставропольском крае: итоги реализации в 2011 году // Ставропольская правда. 2012. 15 февраля.
5. Родченко А. М. Оценка конкурентоспособности региона и формирование стратегии его развития: автореф. … канд. экон. наук. Ставрополь, 2010.
6. Янкевич Е. Ребрединг на пользу // Ставропольский бизнес. 2010. 18 октября.
7. Официальный сайт Инновационно-технологического бизнес-центра Ставропольского края. URL: http://stavintech.ru/innov/innovation/medicina/main.html
8. Bridging the Innovation Gap in Russia / The Helsinki Seminar, March 2001. P.: OECD, 2001.

УДК 330.5.057.7

Таточенко Тамара Викторовна, Торопцев Евгений Львович

ОБОБЩЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В статье приведен математический аппарат анализа собственных динамических свойств экономических систем.
Ключевые слова: устойчивость, межотраслевой баланс, динамические свойства.

Tatochenko Tamara Viktorovna, Toroptsev Eugeniy L'vovich

THE GENERALIZED METHODS OF THE ANALYSIS OF DYNAMIC PROPERTIES OF ECONOMIC SYSTEMS

The mathematical apparatus of the analysis of own dynamic properties of economic systems is given in article.
Key words: stability, intersectoral balance, dynamic properties.

Исследования, проводимые в рамках научной школы проф. Е. Л. Торопцева и во многом обобщенные в [1, 2] показали, что задача обеспечения колебательной (циклической) статической устойчивости и приемлемой динамики развития экономических систем тесно связана с пониманием их динамических свойств. Последние могут рассматриваться в рамках динамических межотраслевых моделей (МОБ) В. В. Леонтьева, линейных или линеаризованных, представляющих собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которые в авторских обозначениях имеют вид:

$$BpX(t) + AX(t) + Y(t) = X(t), \tag{1}$$

где $p = \dfrac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования.

Анализ колебательной устойчивости и темпов экономического роста (или спада) производится по собственным числам и векторам матрицы замкнутой модели МОБ, записанной в нормальной форме Коши. Для замыкания модели (1) необходимо вектор потребления $Y(t)$ выразить через другие переменные. Для этого надо ввести единицу измерения количества труда, потребного в той или иной отрасли, и заработной платы за вложенный труд. Чтобы излишне не усложнять модель, будем считать, что разделения труда на категории нет.

Предположим, $a_{n+1,i}$ – количество труда, требуемого отрасли с номером i для выпуска единицы продукта за время t. Тогда для выпуска в тот же период времени вектора $X(t)$ требуется затратить $\sum_{i=1}^{n} a_{n+1,i} x_i(t)$ единиц труда. Пусть единица труда потребляет за период времени t продукцию i-й отрасли в количестве q_i единиц. Тогда $y_i(t) = q_i \sum_{j=1}^{n} a_{n+1,j} x_j(t),$ или в матричном виде

$$Y(t) = QX(t), \tag{2}$$

где Q – матрица размерностью $n \times n$, имеющая i-ю строку $q_i a_{n+1} = q_i(a_{n+1,1}, a_{n+1,2...}, a_{n+1,n})$.

Таким образом, модель (1) замыкается и приводится к виду:

$$BpX(t) + FX(t) = 0, \tag{3}$$

где матрица $F = A + Q - E$, E – единичная матрица.

Математический аппарат для анализа собственных динамических свойств экономических систем. Формирование представления о собственных динамических свойствах (СДС) полностью основывается на собственных числах и векторах матрицы коэффициентов уравнений переходных процессов (3), приведенных к нормальной форме Коши (4):

$$\dot{X}(t) = GX(t),\ \ G = -B^{-1}F\,. \tag{4}$$

Устойчивость, частоты и затухания отдельных составляющих движения. Изучение динамических процессов в больших экономических системах является сложной задачей, поскольку поведение режимных параметров и показателей отраслей в различных частях экономики самым тесным образом взаимосвязано и взаимообусловлено. Это определяет необходимость использования достаточно подробных и полных балансовых моделей без существенного эквивалентирования. Численные показатели СДС являются чрезвычайно полезными для исследования сложных систем и позволяют решить ряд проблем управления, модернизации и роста экономики.

Считая, что матрица G модели (4) имеет простую структуру, то есть количество различных собственных чисел совпадает с размерностью системы, запишем составляющие решения в виде:

$$x^{(j)}(t)\ =\ d_1 u_1^{(j)} e^{\lambda_1 t}\ +\ \ldots\ +\ d_m u_m^{(j)} e^{\lambda_m t},\ j = 1, 2, \ldots, m, \tag{5}$$

где λ_i, U_i, i=1, 2,…, m – собственные числа и соответствующие им собственные векторы матрицы G.

Коэффициенты d_i определяются вектором начальных значений отраслевых выпусков X_0 и собственными векторами V_i транспонированной матрицы состояния G^T в соответствии со следующим выражением:

$$d_i\ =\ V_i^T X_0\,. \tag{6}$$

Векторы U_i и V_i нормированы и ортогональны друг другу для различных собственных чисел так, что:

$$V_i^T U_j\ =\ 0\quad \text{для}\ \ i \neq j,\quad V_i^T U_j\ =\ 1\quad \text{для}\ \ i = j\,. \tag{7}$$

Собственные числа λ_i характеризуют *затухания* и *частоты* отдельных составляющих движения и являются общепризнанными показателями при анализе статической устойчивости линейных систем.

Анализ собственных чисел λ_i с однократным их вычислением целесообразно проводить для различных режимов функционирования экономики и уровней детализации математического описания, выявляя связь СДС с параметрами режима и модели. Термин «режим» подразумевает как варьирование условий работы экономических систем, так и учет неопределенности исходных данных из-за наличия статистической ошибки в них. Тем самым исследуется параметрическая устойчивость модели.

Наблюдаемость составляющих движения. Значимость каждого собственного значения λ_i матрицы G для системы в целом, кроме уровня демпфирования или характеристики роста, определяется характером наблюдаемости составляющей движения $e^{\lambda_i t}$, отвечающей этому собственному числу, и управляемости ею. Количественные определения этих важных понятий полностью зависят от компонент собственных векторов. Выражения (6) позволяют сделать выводы о *наблюдаемости* отдельных составляющих движения $e^{\lambda_i t}$ в $x^{(k)}(t)$.

Например, если компонента $u_i^{(k)}$=0, то составляющая $e^{\lambda_i t}$ вообще не наблюдается в $x^{(k)}(t)$ – в выпуске k-й отрасли. Для ненулевых $u_i^{(k)}$ частное

$$\delta_i^{(l,k)} = \frac{\left|u_i^{(l)}\right|}{\left|u_i^{(k)}\right|} \tag{8}$$

определяет, во сколько раз составляющая движения, определяемая экспонентой $e^{\lambda_i t}$ заметнее в отрасли l по сравнению с отраслью с номером k. Крайне существенно, что соотношение амплитуд (9) не зависит от начальных условий, определяется только вектором U_i и является внутренним свойством системы (5). Это объясняет происхождение термина «собственные динамические свойства». Соотношение (9) позволяет оценить системные свойства составляющей $e^{\lambda_i t}$ в зависимости от того, в каком числе отраслей хозяйства они проявляются заметным образом. С этой целью зададимся некоторым пороговым значением $\delta_0 < 1$ для частных $\delta_i^{(l,k)}$. Положим также, что $u_i^{(k)}$ – максимальная по модулю компонента вектора U_i из заданного числа сравниваемых. Если количество отношений (9), удовлетворяющих неравенству

$$\left|\delta_i^{(l,k)}\right| > \delta_0 \tag{9}$$

невелико, то составляющая $e^{\lambda_i t}$ носит в экономике локальный характер и заметно проявляется только в отдельных ее отраслях, в числе которых $x^{(k)}(t)$. С ростом количества $\delta_i^{(l,k)}$, удовлетворяющих неравенству (10), системный характер экспоненты $e^{\lambda_i t}$ и ее значимость для экономики в целом возрастают.

Так как частное вида (8) не зависит от места и вида возмущения или шока в экономике, а определяется только внутренними свойствами системы, то из всего вектора выпуска X_1, имеющего размерность m, можно выделить подвектор отраслей $\tilde{X}$ размерностью $p < m$, содержащий анализируемую составляющую движения. Аналогичное выделение выполняется для собственного вектора $U_i,\ \ i = 1,...,m \ \rightarrow\ \tilde{U}_i, \quad i = 1,..., p$.

Тогда наблюдаемость составляющей движения $e^{\lambda_i t}$ в выпуске $\tilde{x}^{(k)}$ отрасли с номером k вычисляется по следующему выражению:

$$\frac{\tilde{u}_i^{(k)}}{\tilde{u}_i^{(s)}} = \delta_i^{(k)} e^{j\varphi_k}, \quad j = \sqrt{-1}, \tag{10}$$

где $\tilde{u}_i^{(s)} = \max\,(\tilde{u}_i^{(j)}),\ \ j = \overline{1, p}$ – максимальная компонента собственного вектора.

Абсолютные значения частных (11) образуют вектор коэффициентов наблюдаемости $\Delta_i = \left(\delta_i^{(1)}, \delta_i^{(2)}, ..., \delta_i^{(m)}\right)^T$, в котором максимальная компонента $\delta_i^{(s)}$ имеет значение, равное 1. Это означает, что в выпуске $\tilde{x}^{(s)}$ составляющая $e^{\lambda_i t}$ будет наблюдаться с максимальной амплитудой. Значения амплитуд данной составляющей в других отраслях $\tilde{X}$ относительно максимальной определяются соответствующими компонентами вектора Δ_i.

Фазовые составляющие частных (11) образуют вектор фаз:

$$\Phi_i = \left(\varphi_i^{(1)}, \varphi_i^{(2)}, ..., \varphi_i^{(m)}\right)^T,$$

с которыми форма движения $e^{\lambda_i t}$ наблюдается в переменных $\tilde{X}$. Здесь в качестве точки отсчета выступает фаза переменной $\tilde{x}^{(s)}$.

Стоит еще раз подчеркнуть, что векторы наблюдаемости позволяют классифицировать формы движения как *локальные* или *общесистемные*. Так, если p достаточно велико, а число компонент вектора Δ_i, соизмеримых с 1, близко к размерности вектора $\Delta_i\, p$, то составляющую $e^{\lambda_i t}$ следует отнести к общесистемным. Иными словами, она с соизмеримой амплитудой наблюдается в валовых выпусках многих отраслей или секторов экономики.

Для оценки системных свойств составляющей $e^{\lambda_i t}$ наряду с коэффициентами наблюдаемости можно предложить для использования и другую численную характеристику, которую назовем *показателем наблюдаемости* η_i. Определим ее следующим образом:

$$\eta_i = \frac{m_i}{m} \cdot 100\%, \tag{12}$$

где m – число фондообразующих отраслей экономики в рассматриваемой модели МОБ, m_i – число отраслей, удовлетворяющих условию:

$$\delta_i^{(j)} > \delta_0, \quad j = 1,..., p$$

для некоторого фиксированного $\delta_0\ (0 < \delta_0 < 1)$.

Управляемость, функции чувствительности по параметрам. Обеспечение желаемых или максимально возможных динамических свойств экономических систем успешно достигается численным поиском компонент вектора конечного спроса Y и параметров монетарного сектора. Первый востребован для формирования сигнала управления, так как, кроме конечного потребления в домашних хозяйствах, включает затраты на потребление в секторе правительства, прирост запасов и экспортноимпортное сальдо. Второй представляет собой естественный безынерционный регулятор, вписанный в таблицы «Затраты-выпуск».

При решении вопросов управляемости СДС системы (4) важное значение приобретает зависимость собственных чисел λ_i от указанных параметров (пусть обобщенно это будут y_j). Она характеризуется функцией чувствительности λ_i от y_j, которая выражается через собственные векторы U_i и V_i матриц G и G^T соответственно; T – символ транспонирования.

Дифференцируя известное из линейной алгебры соотношение:

$$GU_i = \lambda_i G_i \tag{12}$$

по коэффициенту y_j, получим:

$$\frac{\partial G}{\partial y_j} U_i + G \frac{\partial U_i}{\partial y_j} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial y_j} U_i + \lambda_i \frac{\partial U_i}{\partial y_i}.$$

Умножив это равенство слева на V_i^T, запишем его в виде:

$$V_i^T \frac{\partial G}{\partial y_j} U_i = \frac{\partial \lambda_i}{\partial y_j} V_i^T U_i - \left(V_i^T G - \lambda_i V_i^T\right) \frac{\partial U_i}{\partial y_j}. \tag{13}$$

С учетом $V_i^T G = \lambda_i V_i^T$, что следует из $G^T V_i = \lambda_i V$, выражение (13) приводится к уравнению:

$$V_i^T \frac{\partial G}{\partial y_j} U_i = \frac{\partial \lambda_i}{\partial y_j} V_i^T U_i,$$

откуда окончательно имеем:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial y_j} = \frac{V_i^T \frac{\partial G}{\partial y_j} U_i}{V_i^T U_i}. \qquad Q \tag{14}$$

Установленная связь между коэффициентами чувствительности λ_i от y_j и собственными векторами U_i и V_i в частном случае, когда в роли y_j выступает элемент матрицы и векторы нормированы на единицу, принимает еще более простой вид:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial y_{kj}} = v_i^{(k)} u_i^{(j)}. \tag{15}$$

Формулы (14, 15) можно успешно использовать для анализа динамики макроэкономических систем и возможностей по управлению ими. При этом вариация индекса i позволяет выяснить характер воздействия данного y_j на различные λ_i при постоянном j. В этом случае наличие соизмеримых, но противоположных по знаку величин $\partial \lambda_i / \partial y_j$ означает встречное движение корней в комплексной плоскости при изменении y_j и часто требует различных процедур координации параметров.

Абсолютное значение амплитуды составляющей $e^{\lambda_i t}$ в отличие от относительного (8), зависит от начальных условий в соответствии с системой (5). Отсутствие в разложении вектора начальных условий $X(0)$ по собственным векторам U_i хотя бы одного вектора однозначно определяет отсутствие составляющей $e^{\lambda_i t}$ в решении (5).

Возбуждаемость составляющих движения – это показатель относительных амплитуд форм движения в экономической системе, которые не зависят от места и вида возмущений. Абсолютные же значения амплитуд, как ясно из вышесказанного, зависят от возмущения. Рассмотрим возмущение, при котором ненулевое значение, равное 1, имеет только одна компонента X_0. Пусть для определенности это k-я компонента. Тогда:

$$d_i = V_i^T X_0 = v_i^{(k)} \tag{16}$$

и амплитуда составляющей движения $e^{\lambda_i t}$ в переменной $x^{(j)}(t)$ равна:

$$d_i u_i^{(j)} = v_i^{(k)} u_i^{(j)}.$$

Таким образом, амплитуда зависит от точки k приложения возмущения в системе и ее величина пропорциональна k-ой компоненте $v_i^{(k)}$ собственного вектора транспонированной матрицы состояния.

По сути, это значит, что при выбранном виде экономического шока значения компонент вектора V_i являются показателями величины амплитуды составляющей движения $e^{\lambda_i t}$ в j-й составляющей выпуска $x^{(j)}(t)$ в зависимости от места возмущения. Разумеется, отраслевые и межотраслевые возмущения при исследовании реальных экономических систем по их балансовым моделям можно связать с конкретным географическим местом, с названиями предприятий и фирм. Для того, чтобы иметь возможность сопоставить результаты, имеет смысл аналогично проделанному выше перейти от полных векторов размерности m к сокращенным, имеющим размерность p, содержащим анализируемую составляющую движения и к соответствующим переменным одной физической природы:

$$U \to \widetilde{U}, \;\; V \to \widetilde{V}, \;\; X \to \widetilde{X}.$$

Коэффициентом возбуждаемости составляющей $e^{\lambda_i t}$ при возмущении по переменной $x^{(j)}$ назовем следующую величину

$$\gamma_i^{(j)} = \left| \frac{\widetilde{v}_i^{(j)} \widetilde{u}_i^{(j)}}{\widetilde{v}_i^{(k)} \widetilde{u}_i^{(j)}} \right| = \frac{\left| \widetilde{v}_i^{(j)} \right|}{\left| \widetilde{v}_i^{(k)} \right|},$$

где $\widetilde{v}_i^{(k)} = \max(\widetilde{v}_i^{(l)}), \;\; l = 1,..., p$ – максимальная компонента собственного вектора.

Аналогичным образом рассматривается полный вектор возбуждаемости для i -й составляющей движения:

$$\Gamma_i = \left(\gamma_i^{(1)}, \gamma_i^{(2)}, ..., \gamma_i^{(p)}\right)^T.$$

Значения компонент полученного вектора лежат в диапазоне от 0 до 1, причем k-я компонента максимальна и равна 1.

Для принятого вида возмущения только по одной отрасли экономики вектор возбуждаемости имеет ясный экономический смысл. Любая его j-я компонента показывает долю амплитуды i-й формы движения, которая возбудится при возмущении в выпуске отрасли $\tilde{x}(j)$ с номером j по сравнению с максимальной амплитудой при возмущении (шоке) в отрасли k, т. е. по переменной $\tilde{x}^{(k)}$. Важно подчеркнуть, что любой элемент вектора Γ_i связан с определенной отраслью балансовой схемы. Поэтому вектор возбуждаемости показывает значимость отрасли возникновения экономического потрясения с позиции возбуждения i-й составляющей движения. Заметим, что если какая-либо компонента Γ_i равна нулю, например l -я, то возмущение по $\widetilde{x}^{(l)}$ вообще не возбудит составляющую $e^{\lambda_i t}$.

Естественно предположить, что реальные возмущения в сложных экономических системах, обусловленные шоками спроса, предложения, инвестициями и тому подобными факторами, отличаются от рассмотренного выше идеализированного возмущения и вызывают появление ненулевых начальных условий практически во всех отраслях народного хозяйства. Однако расчеты, проведенные для модельных балансовых схем различной размерности, показывают, что наибольшие начальные значения имеют место у отраслей, наиболее тесно связанных с возмущаемой. В этом смысле рассмотренное идеализированное возмущение можно представить как некоторое приближение реальных флуктуаций в экономике, генерирующих циклы деловой активности. Тогда вектор возбуждаемости является вектором ранжирования отраслей и секторов сложной экономической системы, возникновение возмущений в которых опасно с точки зрения возбуждения определенной составляющей движения.

Изложенный аппарат приобретёт высокую актуальность практического использования по завершении Росстатом исполнения Распоряжения Правительства от 14 февраля 2009 года № 201-р «О разработке базовых таблиц «Затраты-выпуск».

Литература

1. Торопцев Е. Л., Гурнович Т. Г. Численные методы анализа и преобразования балансовых моделей В. В. Леонтьева. М.: Финансы и статистика, 2002. 254 с.

2. Торопцев Е. Л., Таточенко Т. В. Управление устойчивостью социально-экономических систем. Lambert Academic Publishing, 2011. 356 с.