УДК 517.1:510.64

Самонов Виталий Евгеньевич

ПРЕДЕЛЫ НЕЧЕТКИХ ФУНКЦИЙ

В статье сформулированы определения пределов нечетких функций обычного и нечеткого переменного. Рассмотрены основные свойства этих пределов. Показано, что основные свойства пределов обычной функции действительного переменного могут быть распространены на нечеткие функции.

Ключевые слова: нечеткий предел, нечеткая функция, нечеткие числа, нечеткий анализ.

Samonov Vitaly Evgen'evich

LIMITS OF THE FUZZY FUNCTIONS

The limits of the fuzzy functions for crisp and fuzzy variables was defined. The main properties for this limits was consider. In this paper section we show that the main properties of limits for real crisp functions can be extended to limits of the fuzzy functions.

Key words: fuzzy limits, fuzzy function, fuzzy numbers, fuzzy analysis.

Как известно [1], в основе классического анализа лежит понятие предела последовательности и функции. В связи с этим понятие нечеткого предела играет центральную роль в построении нечеткого анализа и его приложений. Сформулируем определения и исследуем основные свойства пределов нечетких функций.

В соответствии с [7] под нечеткими функциями будем понимать:

– нечеткозначные функции $\tilde{Y}$ обычного (не нечеткого) переменного

$$\tilde{Y}(x) = \bigcup_{\alpha\in(0,1]} \alpha \cdot Y_\alpha = \bigcup_{\alpha\in(0,1]} \alpha \left[Y_\alpha^-(x); Y_\alpha^+(x) \right]; \tag{1}$$

– обычные функции нечеткого переменного

$$y(\tilde{x}) = \bigcup_{\alpha\in(0;1]} \alpha \cdot y\left(x_\alpha\right); \tag{2}$$

– нечеткие функции нечеткого переменного

$$\tilde{y}(\tilde{x}) = \bigcup_{\alpha\in(0,1]} \alpha \cdot Y_\alpha(x_\alpha). \tag{3}$$

Здесь для построения нечетких функций использован известный α-уровневый принцип обобщения [4, 9]; тильдой помечены нечеткие множества (нечеткие числа) значений аргумента и функции, индексом α помечены множества α-уровня соответствующих нечетких множеств. Более подробно вопросы построения нечетких функций рассмотрены в [2].

Вообще, теория нечетких пределов включает в себя два качественно различных подхода:

– нечеткий предел построенный для обычных последовательности и функции («нечеткий предел М. Бургина» [5, 6]);

– нечеткий предел нечетких последовательностей и функций, построенный на основе α-уровневого принципа обобщения [3, 8].

Нечеткий предел М. Бургина используется в построении теоретических основ неклассического анализа в целом и нечеткого анализа в частности. Однако его использование не совсем удобно в практических приложениях. Поэтому рассмотрим более подробно предел, построенный на основе α-уровневого принципа обобщения.

Введем понятие нечеткой последовательности [3].

Опр. Назовем *нечеткой последовательностью*

$$\{\tilde{a}_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \bigcup_{\alpha\in(0,1]} \alpha \cdot \left[\left(\tilde{a}_n\right)_\alpha^-, \left(\tilde{a}_n\right)_\alpha^- \right] \right\}_{n=1}^{\infty} \tag{4}$$

совокупность нечетких чисел $\tilde{a}_n$, поставленных в соответствие натуральному числу n, а последовательности $\{(\tilde{a}_n)_\alpha^-\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{(\tilde{a}_n)_\alpha^+\}_{n=1}^{\infty}$ соответственно *левой и правой α-последовательностями* нечеткой последовательности $\{\tilde{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$. Пределы последовательностей $\{(\tilde{a}_n)_{\alpha}^{-}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{(\tilde{a}_n)_{\alpha}^{+}\}_{n=1}^{\infty}$ соответственно назовем *левым и правым α-пределами* последовательности $\{\tilde{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Лемма. Семейство замкнутых интервалов $\{\tilde{a}_{\alpha}=[\tilde{a}_{\alpha}^{-};\tilde{a}_{\alpha}^{+}]:0<\alpha\le 1\}$, где $\tilde{a}_{\alpha}^{-}$ и $\tilde{a}_{\alpha}^{+}$ – соответственно левый и правый α-пределы последовательности $\{\tilde{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$, порождает замкнутое унимодальное нечеткое число.

Опр. *Пределом нечеткой последовательности* $\{\tilde{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ назовем нечеткое число $\tilde{a}$, порождаемое семейством интервалов $\{\tilde{a}_{\alpha}=[\tilde{a}_{\alpha}^{-};\tilde{a}_{\alpha}^{+}]:0<\alpha\le 1\}$, границы которых являются левыми и правыми α-пределами последовательности $\{\tilde{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Теорема 1. Для того чтобы нечеткое число $\tilde{a}$ являлось пределом $\tilde{a}=\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{a}_n$ нечеткой последовательности $\{\tilde{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$, необходимо и достаточно:

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists N=N(\varepsilon):\quad n\ge N\Rightarrow D\left(\tilde{a}_n,\tilde{a}\right)<\varepsilon\,, \tag{5}$$

где

$$D\left(\tilde{a}_n,\tilde{a}\right)=\sup_{0<\alpha\le 1}\max\left(\left|(\tilde{a}_n)_{\alpha}^{-}-\tilde{a}_{\alpha}^{-}\right|,\left|(\tilde{a}_n)_{\alpha}^{+}-\tilde{a}_{\alpha}^{+}\right|\right). \tag{6}$$

Выражение (5) совпадает с определением предела нечеткой последовательности, приведенным в работе М. Матлоки [8]. Однако определение на основе α-последовательностей более удобно для дальнейшего использования α-уровневого принципа обобщения.

Понятие предела нечеткой последовательности позволяет перейти к пределу нечеткой функции.

Опр. Пусть имеется некоторая нечеткозначная функция $\tilde{Y}(x)$ обычного переменного *x*, определенная на интервале $(a;b)$. Нечеткое число $\tilde{A}$ назовем *пределом нечеткозначной функции* ($\tilde{A}=\lim\limits_{x\to x_0}\tilde{Y}(x)$), если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0, нечеткая последовательность $\{\tilde{y}_n=\tilde{Y}(x_n)\}$ сходится к $\tilde{A}$.

Аналогично определим пределы обычной функции нечеткого переменного и нечеткой функции нечеткого переменного.

Опр. Пусть имеется некоторая функция $y(\tilde{x})$ нечеткого переменного $\tilde{x}$, определенная на интервале $(\tilde{a};\tilde{b})$. Число A назовем *пределом обычной функции нечеткого аргумента* ($A=\lim\limits_{\tilde{x}\to\tilde{x}_0}y(\tilde{x})$), если для любой нечеткой последовательности $\{\tilde{x}_n\}$, сходящейся к $\tilde{x}_0$, последовательность $\{y_n=y(\tilde{x}_n)\}$ сходится к A.

Опр. Пусть имеется некоторая нечеткая функция $\tilde{y}(\tilde{x})$ нечеткого переменного $\tilde{x}$, определенная на интервале $(\tilde{a};\tilde{b})$. Нечеткое число $\tilde{A}$ назовем *пределом нечеткой функции нечеткого переменного* ($\tilde{A}=\lim\limits_{x\to x_0}\tilde{y}(\tilde{x})$), если для любой нечеткой последовательности $\{\tilde{x}_n\}$, сходящейся к $\tilde{x}_0$, нечеткая последовательность $\{\tilde{y}_n=\tilde{y}(\tilde{x}_n)\}$ сходится к $\tilde{A}$.

Пример. Рассмотрим последовательность чисел $x_n=1/n$, сходящуюся к $x_0=0$, и нечеткозначную функцию обычного переменного $\tilde{Y}(x)=\dfrac{\widetilde{\sin x}}{x}$ с треугольной функцией принадлежности и фиксированными «границами нечеткости»: $l_y=-1$, $r_y=1.5$. Тогда множество α-уровня данной функции имеет вид:

$$\left[-1+\alpha(Y(x)+1);1.5+\alpha(Y(x)-1.5)\right]=\left[\alpha\cdot Y(x)+\alpha-1;1.5(1-\alpha)+\alpha\cdot Y(x)\right],$$

а множества α-уровня членов последовательности $\tilde{Y}(x_n)$ записываются как

$$\left[\alpha\frac{\sin 1/n}{1/n}+\alpha-1;\,1.5(1-\alpha)+\alpha\frac{\sin 1/n}{1/n}\right] \text{ или } \left[\alpha\cdot n\cdot\sin\left(1/n\right)+\alpha-1;\,\alpha\cdot n\cdot\sin\left(1/n\right)+1.5(1-\alpha)\right].$$

Вычисляя левый и правый α-пределы этой нечеткой последовательности при $n \to \infty$, получаем $\left[2\alpha - 1; 1.5 - 0.5\alpha\right]$. Таким образом, в данном случае

$$\lim_{x\to 0}\frac{\widetilde{\sin x}}{x} = \bigcup_{\alpha\in(0;1]} \alpha\left[2\alpha - 1; 1.5 - 0.5\alpha\right]$$

и при $\alpha = 1$ получаем известное значение первого замечательного предела.

Теорема 2. Пусть нечеткозначная функция $\tilde{Y}(x)$ обычного переменного x определена на интервале $(a;b)$. Для того чтобы нечеткое число $\tilde{A}$ являлось пределом функции $\tilde{Y}(x)$, необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\delta = \delta(\varepsilon): \quad |\,x - x_0\,| < \delta \Rightarrow D\left(\tilde{Y}(x), \tilde{A}\right) < \varepsilon, \tag{7}$$

где

$$D\left(\tilde{Y}(x), \tilde{A}\right) = \sup_{0<\alpha\le 1} \max\left(\left|Y_\alpha^-(x) - A_\alpha^-\right|, \left|Y_\alpha^+(x) - A_\alpha^+\right|\right). \tag{8}$$

Доказательство необходимости

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}\tilde{Y}(x) = \tilde{A}$. Предположим, что условие теоремы не выполняется, т. е. существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдется такое $x = x(\delta) \ne x_0$ из $(a;b)$, что $|\,x - x_0\,| < \delta$, а $D\left(\tilde{Y}(x), \tilde{A}\right) \ge \varepsilon_0$. Выбирая $\delta = 1/n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, рассмотрим последовательность $x_n = x(1/n)$ ($n = 1, 2, \ldots$), которая удовлетворяет условиям

$$|\,x_n - x_0\,| < \frac{1}{n}, \qquad x_n \ne x_0, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

и

$$D\left(\tilde{Y}(x_n), \tilde{A}\right) \ge \varepsilon_0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Из первого условия следует, что при $n \to \infty$ имеем $|\,x_n - x_0\,| \to 0$, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Однако поскольку $\varepsilon_0 > 0$, то второе условие противоречит необходимым и достаточным условиям теоремы 1 существования предела нечеткой последовательности $\tilde{Y}(x_n)$. Отсюда следует, что число $\tilde{A}$ не является пределом нечеткозначной функции $\tilde{Y}(x)$ при $x \to x_0$. Мы пришли к противоречию. Необходимость доказана.

Доказательство достаточности

Пусть нечеткое число $\tilde{A}$ удовлетворяет условию теоремы. Покажем выполнение равенства $\tilde{A} = \lim\limits_{n\to\infty}\tilde{Y}(x_n)$ для любой последовательности $\{x_n\}$ из $(a;b)$, такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $x_n \ne x_0$, $n = 1, 2, \ldots$.

Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано и $\delta = \delta(\varepsilon)$ соответствует условиям (7). Тогда из сходимости последовательности $\{x_n\}$ следует существование такого $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что для всех $n \ge N$ выполняется неравенство $|\,x_n - x_0\,| < \delta$. Тогда в силу условий теоремы для всех $n \ge N$ выполняется неравенство $D\left(\tilde{Y}(x), \tilde{A}\right) < \varepsilon$. В силу произвола выбора ε имеем: $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{Y}(x_n) = \tilde{A}$. Достаточность доказана.

Аналогичные теоремы формулируются и доказываются для пределов обычной функции нечеткого переменного и нечеткозначной функции нечеткого переменного.

Опр. Пусть нечеткозначная функция $\tilde{Y}(x)$ обычного переменного x определена на полуинтервале $(a;b]$. Нечеткое число $\tilde{A}$ назовем *левосторонним пределом* функции $\tilde{Y}(x)$ при $x \to x_0 - 0$ ($\tilde{A} = \lim\limits_{x\to x_0 - 0}\tilde{Y}(x)$), где $x_0 \in (a;b]$, если:

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta = \delta(\varepsilon): \quad x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow D\left(\tilde{Y}(x), \tilde{A}\right) < \varepsilon. \tag{9}$$

Аналогично определяется правосторонний предел функции $\tilde{Y}(x)$ при $x \to x_0 + 0$.

Теорема 3. Нечеткозначная функция $\tilde{Y}(x)$ имеет предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке существуют оба односторонних предела, причем $\tilde{A} = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} \tilde{Y}(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} \tilde{Y}(x)$.

Соответствующие теоремы формулируются и доказываются для обычной функции нечеткого переменного и нечеткозначной функции нечеткого переменного.

Опр. Пусть нечеткозначная функция $\tilde{Y}(x)$ обычного переменного задана в виде семейства множеств α-уровня. Назовем *левым и правым α-пределами функции* $\tilde{Y}(x)$ при $x \to x_0$ соответствующие пределы границ $\tilde{Y}_\alpha^-(x)$ и $\tilde{Y}_\alpha^+(x)$ ее множеств α-уровня

$$\tilde{A}_\alpha^- = \lim_{x \to x_0} \tilde{Y}_\alpha^-(x) \text{ и } \tilde{A}_\alpha^+ = \lim_{x \to x_0} \tilde{Y}_\alpha^+(x). \tag{10}$$

Для практических расчетов удобно выразить предел нечеткой функции через ее α-пределы. В качестве примера рассмотрим нечеткую функцию обычного переменного.

Теорема 4. Нечеткое число $\tilde{A}$ является пределом нечеткозначной функции $\tilde{Y}(x)$ обычного переменного в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке существуют оба ее α-предела, причем

$$\tilde{A} = \lim_{x \to x_0} \tilde{Y}(x) = \bigcup_{\alpha \in [0;1]} \left[\lim_{x \to x_0} \tilde{Y}_\alpha^-(x); \lim_{x \to x_0} \tilde{Y}_\alpha^+(x) \right]. \tag{11}$$

Доказательство

Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} \tilde{Y}(x) = \tilde{A}$. Тогда найдется такая последовательность $\{x_n\} \to x_0$, для которой значения функции $\tilde{Y}(x_n)$ сходятся к нечеткому числу $\tilde{A}$. Поскольку $\tilde{Y}(x_n)$ являются нечеткими числами, для каждого $\alpha \in (0;1]$ возможно указать границы $\tilde{Y}_\alpha^\pm(x_n)$ множеств α-уровня этих нечетких чисел. Последовательности $\{\tilde{Y}_\alpha^-(x_n)\}$ и $\{\tilde{Y}_\alpha^+(x_n)\}$ при $n \to \infty$ сходятся к границам множеств α-уровня $\tilde{A}_\alpha^-$ и $\tilde{A}_\alpha^+$ нечеткого числа $\tilde{A}$.

Таким образом, если число $\tilde{A}$ является пределом нечеткозначной функции $\tilde{Y}(x)$ при $x \to x_0$, то оба α-предела этой функции $\tilde{Y}_\alpha^\pm(x)$ также сходятся и выполняется равенство (11).

Пусть теперь выполняется равенство (11). Выберем последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к x_0. Тогда для каждого $\alpha \in (0;1]$ можно построить последовательности значений функций $\tilde{Y}_\alpha^\pm(x_n)$, соответственно сходящиеся к $\tilde{Y}_\alpha^\pm(x_0)$. Числа $\tilde{Y}_\alpha^\pm(x_n)$ являются границами множеств α-уровня нечеткого числа $\tilde{Y}(x_n)$. Таким образом, мы получили последовательность $\{\tilde{Y}(x_n)\}$ значений нечеткозначной функции $\tilde{Y}(x)$ в точках x_n, сходящуюся к $\tilde{Y}(x_0)$. То есть нечеткое число $\tilde{A}$ является пределом функции $\tilde{Y}(x_0)$ при $x \to x_0$. Теорема доказана.

Сформулируем правило замены переменной для пределов нечеткой функции каждого из трех типов. В качестве примера рассмотрим обычную функцию нечеткого переменного.

Теорема 5. Пусть обычная функция $y(\tilde{x})$ нечеткого переменного $\tilde{x}$ имеет предел в точке $\tilde{x}_0$: $\lim\limits_{\tilde{x} \to \tilde{x}_0} y(\tilde{x}) = A$ и пусть существуют:

– нечеткая функция $\tilde{x}(t)$ обычного переменного, для которой $\lim\limits_{t \to t_0} \tilde{x}(t) = \tilde{x}_0,\ \tilde{x}(t) \neq \tilde{x}_0$ при $t \neq t_0$, или

– нечеткая функция нечеткого переменного $\tilde{x}(\tilde{t})$, для которой $\lim\limits_{\tilde{t} \to \tilde{t}_0} \tilde{x}(\tilde{t}) = \tilde{x}_0$, $\tilde{x}(\tilde{t}) \neq \tilde{x}_0$ при $\tilde{t} \neq \tilde{t}_0$.

Тогда соответственно

– существует предел сложной функции $y\left[\tilde{x}(t)\right]$, равный $\lim\limits_{t \to t_0} y\left[\tilde{x}(t)\right] = A$, или

– существует предел сложной функции $y\left[\tilde{x}(\tilde{t})\right]$, равный $\lim\limits_{\tilde{t} \to \tilde{t}_0} y\left[\tilde{x}(\tilde{t})\right] = A$.

Обобщим на нечеткие функции известные свойства пределов обычных функций [1]. В частности, для обычных функций нечеткого переменного, определенных на интервале $(\tilde{a}, \tilde{b})$, причем $\tilde{x}_0 \in (\tilde{a}, \tilde{b})$, справедливо следующее.

1. Если $z'(\tilde{x}) \le y(\tilde{x}) \le z''(\tilde{x})$ и $\lim\limits_{\tilde{x}\to\tilde{x}_0} z'(\tilde{x}) = \lim\limits_{\tilde{x}\to\tilde{x}_0} z''(\tilde{x}) = A$, то

$$\lim_{\tilde{x}\to\tilde{x}_0} y(\tilde{x}) = A. \tag{12}$$

2. Если $y(\tilde{x}) = c = const$, то

$$\lim_{\tilde{x}\to\tilde{x}_0} y(\tilde{x}) = c. \tag{13}$$

3. Если существует предел $\lim\limits_{\tilde{x}\to\tilde{x}_0} y(\tilde{x})$, то для любого числа c выполняется равенство

$$\lim_{\tilde{x}\to\tilde{x}_0} c\cdot y(\tilde{x}) = c\cdot\lim_{\tilde{x}\to\tilde{x}_0} y(\tilde{x}). \tag{14}$$

4. Если существуют пределы $\lim\limits_{\tilde{x}\to\tilde{x}_0} y(\tilde{x})$ и $\lim\limits_{\tilde{x}\to\tilde{x}_0} z(\tilde{x})$, то справедливы равенства:

$$\lim_{\tilde{x}\to\tilde{x}_0} \big(y(\tilde{x}) \pm z(\tilde{x}) \big) = \lim_{\tilde{x}\to\tilde{x}_0} y(\tilde{x}) \pm \lim_{\tilde{x}\to\tilde{x}_0} z(\tilde{x}), \tag{15}$$

$$\lim_{\tilde{x}\to\tilde{x}_0} \big(y(\tilde{x})\cdot z(\tilde{x}) \big) = \lim_{\tilde{x}\to\tilde{x}_0} y(\tilde{x})\cdot\lim_{\tilde{x}\to\tilde{x}_0} z(\tilde{x}), \tag{16}$$

если также $\lim\limits_{\tilde{x}\to\tilde{x}_0} z(\tilde{x}) \ne 0$, то справедливо

$$\lim_{\tilde{x}\to\tilde{x}_0} \frac{y(\tilde{x})}{z(\tilde{x})} = \frac{\lim\limits_{\tilde{x}\to\tilde{x}_0} y(\tilde{x})}{\lim\limits_{\tilde{x}\to\tilde{x}_0} z(\tilde{x})}. \tag{17}$$

Докажем в качестве примера свойства арифметических операций над пределами обычных функций нечеткого переменного.

Теорема 6. Пусть имеются две обычные функции нечеткого переменного $y(\tilde{x})$ и $z(\tilde{x})$, определенные на интервале $(\tilde{a};\tilde{b})$. Тогда для любого $\tilde{x}_0 \in (\tilde{a};\tilde{b})$ справедливы равенства (15)–(16). Если также $\lim\limits_{\tilde{x}\to\tilde{x}_0} z(\tilde{x}) \ne 0$, то справедливо и (17).

Доказательство

Пусть $\lim\limits_{\tilde{x}\to\tilde{x}_0} y(\tilde{x}) = A$ и $\lim\limits_{\tilde{x}\to\tilde{x}_0} z(\tilde{x}) = B$. Тогда из определения предела обычной функции нечеткого аргумента в $\tilde{x}_0$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} y(\tilde{x}_n) = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} z(\tilde{x}_n) = B$ для любой нечеткой последовательности $\{\tilde{x}_n\}_1^\infty$ такой, что $\tilde{x}_n \in (\tilde{a};\tilde{b})$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n = \tilde{x}_0$. Из свойств арифметических операций над пределами последовательностей [1] следует:

$$\lim_{n\to\infty} \big(y(\tilde{x}_n) \pm z(\tilde{x}_n) \big) = A \pm B;$$

$$\lim_{n\to\infty} \big(y(\tilde{x}_n)\cdot z(\tilde{x}_n) \big) = A\cdot B;$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{y(\tilde{x}_n)}{z(\tilde{x}_n)} \right) = \frac{A}{B}, \text{ где } B \ne 0.$$

Поскольку записанные пределы не зависят от выбора соответствующей нечеткой последовательности $\{\tilde{x}_n\}_1^\infty$, то, согласно определению предела обычной функции нечеткого переменного, имеем:

$$\lim_{\tilde{x}\to\tilde{x}_0} \big(y(\tilde{x}) \pm z(\tilde{x}) \big) = A \pm B;$$

$$\lim_{\tilde{x}\to\tilde{x}_0} \big(y(\tilde{x})\cdot z(\tilde{x}) \big) = A\cdot B;$$

$$\lim_{\tilde{x}\to\tilde{x}_0} \left(\frac{y(\tilde{x})}{z(\tilde{x})} \right) = \frac{A}{B}, \text{ где } B \ne 0.$$

Учитывая, что $A = \lim_{\tilde{x} \to \tilde{x}_0} y(\tilde{x})$ и $B = \lim_{\tilde{x} \to \tilde{x}_0} z(\tilde{x})$, приходим к доказываемым равенствам (15)–(17). Теорема доказана.

Дальнейшие исследования предполагают построение нечетких бесконечно малых функций и анализ метода раскрытия неопределенностей в нечетких пределах.

Литература

1. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ. Т. 1. М.: Высшая школа, 1970. 590 с.
2. Самонов В. Е. Методы построения нечетких функций // Научные исследования: информация, анализ, прогноз: монография. Воронеж: ВГПУ, 2011. С. 112–137.
3. Самонов В. Е. О двух подходах в построении нечетких пределов // Инфокоммуникационные технологии в науке, производстве и образовании: Пятая международная научно-техническая конференция. Ч. 1. Ставрополь: Северо-Кавказский гуманитарно-технический институт, 2012. С. 119–121.
4. Штовба С. Д. Проектирование нечетких систем средствами MATLAB. М.: Горячая линия –Телеком, 2007. 288 с., ил.
5. Burgin M.S. Neoclassical analysis: calculus closer to the real world. Nova Science Publishers, 2007. 396 p.
6. Burgin M. Theory of fuzzy limits // Fuzzy Sets and Systems. 2000. Vol. 115, No. 3. P. 433–443.
7. Cao B.-Y. Convex Interval and Fuzzy (Valued) Functions with Functionals // B.-y. Cao, C.-y. Zhang, and T.-f. Li (Eds.): Fuzzy Info. and Engineering, ASC. Vol. 54. P. 233–244.
8. Matloka M. Sequences of fuzzy numbers. // BUSEFAL. 1986. Vol. 28. P. 28–37.
9. Moore R., Lodwick W. Interval analysis and fuzzy set theory // Fuzzy Sets and Systems. 2003. Vol. 135. No. 1. P. 5–9.