ние под воздействием поля свободного заряда, присутствующего в образцах (по крайней мере, в магнитных жидкостях на основе глицерина и керосина). Проверку выдвинутого предположения планируется провести в последующих исследованиях.

Таким образом, в работе экспериментально исследовано взаимодействие струй магнитной жидкости в электрическом и магнитном полях. Предложен метод расчёта величины плотности формирующегося на поверхности струй заряда, выдвинуто предположение о механизме его формирования.

Литература

1. Ширяева С. О. Электростатическая неустойчивость боковой поверхности струи вязкой жидкости с конечной электропроводностью в коллинеарном электростатическом поле // Журнал технической физики. 2011. Т. 81. Вып. 6.
2. Ширяева С. О. О капиллярной устойчивости цилиндрической струи диэлектрической жидкости в продольном электростатическом поле // Журнал технической физики. 2010. Т. 80. Вып. 2.
3. Абрамова К. Б., Русаков А. И., Самуилов С. Л., Семенов А. А. Разрушение электрическим током струи электропроводящей жидкости, находящейся в жидкой электропроводящей среде // Журнал технической физики. 1995. Т. 65. Вып. 11.

УДК 004.032.26+514.743.2

Макоха Анатолий Николаевич, Тышляр Татьяна Евгеньевна

ПОСТРОЕНИЕ НЕЙРОННОЙ СЕТИ ДЛЯ КЛАССИФИКАЦИИ ТОЧЕК ЛИНЕЙНОГО КОМПЛЕКСА ПЛОСКОСТЕЙ ОБЩЕГО ТИПА

В статье проводится построение, обучение и тестирование искусственной нейронной сети (ИНС), предназначенной для определения принадлежности произвольной точки семимерного проективного комплексного пространства P_7 многообразию особых точек первого рода для линейного комплекса плоскостей общего типа. Этот комплекс не имеет особых точек второго рода и не допускает вполне особых плоскостей.

Ключевые слова: тривектор, арифметическая характеристика тривектора, линейный комплекс плоскостей, многообразие особых точек, нейронная сеть прямого распространения.

Makoha Anatoliy Nicolaevich, Tyshlyar Tatyana Evgenjevna

CONSTRUCTION OF NEURAL NETWORKS FOR CLASSIFICATION POINTS OF LINEAR COMPLEX OF PLANES OF GENERAL TYPE

The work describes the construction, training and testing of an artificial neural network (ANN) designed for determining whether an arbitrary point a seven-dimensional projective complex space P_7 belongs to the variety of singular points of the first kind for linear complex of planes of general type. This complex does not admit the singular points of the second kind and the completely singular planes.

Key words: trivector, arifmetic characteristic of trivector, linear complex of planes, the variety of singular points, the feedforward neural network.

Вычислительные объемы тензорной алгебры в многомерных пространствах настолько велики, что ускорение выполнения тензорных операций требует их распараллеливания, например, с помощью искусственных нейронных сетей (НС) [8, 9].

В данной работе рассматривается построение НС для автоматизации процесса распознавания точек проективного пространства P_7 над полем комплексных чисел для тривекторов общего типа на предмет их принадлежности к одному из двух видов: точки общего положения, особые точки 1-го рода. Каждому из этих видов точек был присвоен индекс 0 и 1 соответственно (ср. [1, 11, 12, 13]).

Классификацию тривекторов восьмого ранга (кососимметрических тензоров третьей валентности) над полем C комплексных чисел независимо друг от друга установили Гуревич [2] и Лонго [3, 4]. В основу классификации Гуревич положил введенные им арифметические инварианты $\rho_k\,(k=1,2,\dots,s)$ и

$\sigma_i\ (i=1,2,3)$ и их свойства. Если через ρ_0 обозначить ранг тривектора W, то при $\rho_0 = 8$ отличными от нуля могут быть лишь инварианты $\rho_1, \rho_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Если два тривектора восьмого ранга имеют одинаковую арифметическую характеристику ($\rho_0\rho_1\rho_2; \sigma_1\sigma_2\sigma_3$), то они проективно эквивалентны, то есть могут быть переведены друг в друга с помощью невырожденных линейных преобразований проективного пространства P_7, в которое может быть помещен тривектор W.

Классификация линейных комплексов K_2 плоскостей в пространстве P_7, проведенная Лонго [3, гл. IV], эквивалентна классификации тривекторов восьмого ранга. Лонго нашел 13 типов линейных комплексов плоскостей, которые отвечают 13 типам тривекторов, найденным Гуревичем [2].

В основе классификации, проведенной Лонго, лежат такие понятия, как особая точка рода h; вполне особое пространство; след комплекса, ассоциированный с особой точкой 2-го рода; особое пространство, ассоциированное с особой точкой 1-го или 2-го рода; особая прямая и др.

Если тривектор W_{ijk} свернуть по одному из индексов с произвольной точкой $\tilde{x} \in P_n$, то полученный бивектор $V_{ij} = W_{ij\alpha}x^\alpha$ называется *подчиненным* тривектору W.

Пусть $n = 2m + \tau$, где $\tau = 0$ или $\tau = 1$ в зависимости от того, будет n четным или нечетным. *Если ранг подчиненного бивектора равен* $2(m-h)$, *где* $1 \le h \le m$, *то точка* $\tilde{x}$ *называется для комплекса* K_2 *особой точкой рода* h. Если $h = m$, точка $\tilde{x}$ является центром комплекса K_2. При $h = 1$ точку $\tilde{x}$ называют *обыкновенной особой точкой* или особой точкой 1-го рода. Если точка $\tilde{x}$ не является особой рода h, то мы будем называть ее *точкой общего положения пространства тривектора* W.

В частности, для тривекторов восьмого ранга $n = 7$, $m = 3$, $\tau = 1$. Следовательно, h может принимать значения лишь 1, 2 или 3. Если погрузить тривектор восьмого ранга в проективное пространство P_7, то особых точек третьего рода не будет. Особыми точками данного рода h будут точки алгебраического многообразия (возможно, пустого), уравнения которого получаются приравниванием нулю миноров данного порядка, полученных из матрицы (V_{ij}). Все комплексы плоскостей в пространстве P_7 ($\rho_0 = 8$) Лонго разбил на три группы:

– комплекс плоскостей *общего* типа. Этот комплекс не допускает вполне особых плоскостей;

– комплекс плоскостей *специального* типа. Этот комплекс допускает единственную вполне особую плоскость, но не допускает особых точек 2-го рода;

– комплексы плоскостей *особых* типов. Эти комплексы допускают, по крайней мере, одну особую точку 2-го рода.

Комплексы плоскостей особых типов в свою очередь подразделяются на две категории в зависимости от того, имеет след комплекса, ассоциированный с особой точкой 2-го рода, единственный центр точку (категория A) или плоскость множества центров (категория B).

Геометрической теории тривекторов посвящены, например, работы [5–7]. В частности, в работе [5] были найдены многообразия особых точек 1-го и 2-го рода для всех возможных 13 типов линейных комплексов плоскостей в пространстве P_7.

Для комплекса плоскостей общего типа особые точки 1-го рода образуют алгебраическое многообразие, которое может быть представлено в виде суммы следующих неприводимых над полем комплексных чисел многообразий:

1. Поверхностей, которые могут быть заданы системой уравнений

$$\begin{cases} x^1(\eta + 2x^8) + 3(x^7)^2 - 3(x^6)^2 = 0, \\ x^4(\eta + 2x^8) - 3x^2x^7 - 3x^3x^6 = 0, \\ x^5(\eta + 2x^8) + 3(x^2)^2 - 3(x^3)^2 = 0, \end{cases}$$

где $\eta \ne -2x^8$ и может быть найдено из соотношения

$$(\eta - x^8)(\eta + 2x^8) = 9(x^2x^6 + x^3x^7).$$

2. Многообразий, определяемых согласно верхнему и нижнему знакам системами уравнений

$$\begin{cases} x^2 = \pm x^3, \\ x^6 = \mp x^7, \\ x^2x^8 - x^5x^6 + x^3x^4 = 0, \\ x^1x^3 - x^4x^6 - x^7x^8 = 0, \end{cases}$$

где $x^2x^6 \neq 0$.

3. Конуса с точечной вершиной, который определяется системой уравнений

$$\begin{cases} x^2 = x^3 = x^6 = x^7 = 0, \\ x^1x^5 - (x^4)^2 = 0. \end{cases}$$

Многообразия особых точек носят инвариантный характер и широко используются при построении геометрии тривекторов восьмого ранга. Примеры такого построения содержатся в работах [6, 7].

Для решения задачи распознавания вида точек была выбрана полносвязная НС прямого распространения с двумя скрытыми слоями, содержащими соответственно 20 и 15 узлов (скрытых нейронов). Входной слой сети состоит из 8 нейронов, соответствующих координатам точек. Выходной слой сети состоит из одного нейрона, выход которого соответствуют указанным выше индексам. Обучение сети происходит с учителем и выполняется с помощью алгоритма *обратного распространения ошибки*.

Для получения обучающего и тестирующего множеств была создана программа в среде Lazarus – интегрированной среде кроссплатформенной разработки приложений в Delphi-подобном окружении [10]. Разработанная программа позволяет генерировать любое количество точек пространства P_7 из заданного диапазона и типа координат этих точек (целые, вещественные, комплексные). В одном из режимов работы программа формирует те координаты точек, которые заранее известны из уравнений многообразий особых точек, а остальные координаты этих точек формируются произвольно генератором псевдослучайных чисел. Проверка на принадлежность точек к каждому виду осуществляется специальной функцией, отдельной для каждого типа линейных комплексов плоскостей. Программа генерирует точки до тех пор, пока не будет получено заданное количество точек каждого вида. После этого результаты можно сохранить в тестовом файле, а данные из этого файла без изменений можно загрузить в программный комплекс NeuroSolutions – среду для обучения и тестирования выбранной модели нейронной сети.

Результаты обучения и тестирования нейронных сетей в среде NeuroSolutions приведены в таблицах 1 и 2 и проиллюстрированы на рисунке.

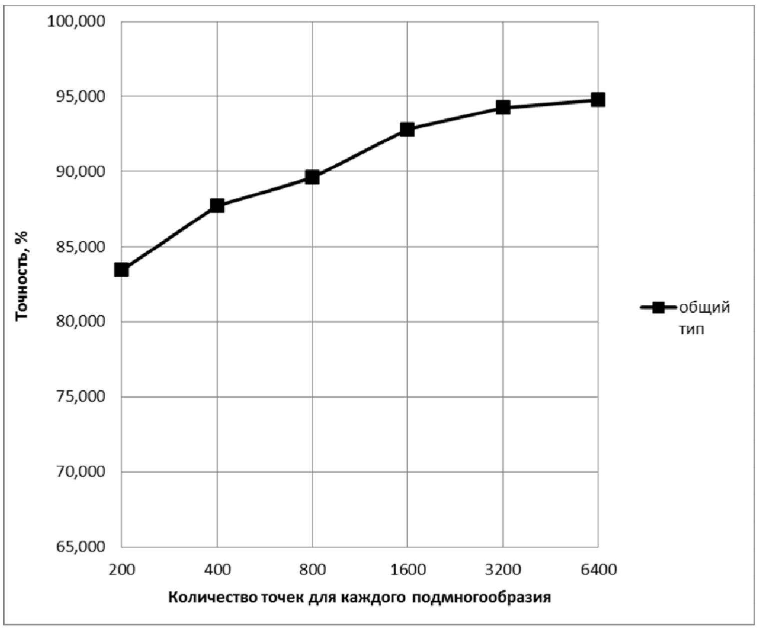

График зависимости точности вычислений от количества точек обучающих множеств

Таблица 1

Результаты тестирования НС на множестве вещественных чисел

Количество примеров	200	400	800	1600	3200	6400
Точность вычислений (в %)	83,471	87,743	89,621	92,815	94,281	94,800

Таблица 2

Результаты тестирования НС на разных диапазонах вещественных чисел

Диапазон чисел	[–100, 100]	[–1000, 1000]
Точность вычислений (в %)	94,281	93,375

В таблице 1 сравнивается точность работы НС, построенной для точек с вещественными координатами из диапазона [–100, 100] в зависимости от количества примеров для каждого подмногообразия в обучающем множестве. В таблице 2 приведены результаты тестирования НС для вещественных координат точек из разных диапазонов.

На основании проведенных экспериментов можно сделать следующие выводы:

1. Для тривекторов общего типа точность вычислений увеличивается с увеличением количества точек обучающего множества. При этом точность стабилизируется при выборе 3200 обучающих примеров на каждое подмногообразие особых точек (см. таблица 1, рисунок).

2. Разработанная структура НС позволяет получать результаты с высокой точностью из любого диапазона вещественных чисел (см. таблица 2).

Разработанная структура НС может также применяться для точек с комплексными координатами с той лишь разницей, что количество входных нейронов будет равно 16.

Литература

1. Makoha A. N., Tyshlyar T. E. Construction of neural networks for determination of singular points of linear complexes of planes of category B // Comptes rendus de l'Académie bulgare des Sciences. 2012. T. 65. № 6. P. 751–758.
2. Гуревич Г. Б. Алгебра тривектора. Ч. II // Труды семинара по вект. и тенз. Анализу. 1948. Вып. 6. С. 28–124.
3. Лонго К. (Longo C.) Sui complessi lineari di piani // Ann. mat. pura ed appl. 1954. T. 4. № 37. P. 61–138.
4. Лонго К. Classificazione di trivettori o di complessi lineari di piani // Rend. Seminario mat. e Polit. di Torino. 1964. № 22. P. 19–38.
5. Макоха А. Н. Особые точки тривекторов восьмого ранга в P_7 // Сб. Геометрия погруженных многообразий. М.: МОПИ им. Н. К. Крупской, 1972. С. 69–97.
6. Макоха А. Н. Линейный комплекс плоскостей, ассоциированный с тривектором типа (886; 410) // Межвуз. сб. науч. тр. «Современная геометрия». Ленинград: ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1980. С. 44–63.
7. Макоха А. Н. Линейные операторы, связанные с тривектором типа (887; 520), и основная группа автоморфизмов этого тривектора // Изв. вузов. матем. 1981. № 7. С. 46–53.
8. Макоха А. Н., Тышляр Т. Е. Моделирование операций тензорной алгебры на базе нейронных сетей // Труды участников Международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова. Абрау-Дюрсо: Изд-во РГУ, 2008. С. 187–189.
9. Макоха А. Н., Тышляр Т. Е. Имитационные модели нейронных сетей, реализующих операции тензорной алгебры над полем комплексных чисел // Нейрокомпьютеры: разработка и применение: Федеральная целевая программа «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2011 гг.»: Материалы Всероссийской научной конференции с элементами научной школы для молодежи «Параллельная компьютерная алгебра» (Ставропольский государственный университет) 11–15 октября 2010 г. 2010. № 9. С. 64–70.
10. Макоха А. Н., Тышляр Т. Е. Генерация примеров для обучения нейронных сетей, классифицирующих многообразия особых точек линейных комплексов плоскостей // Материалы 56-й научно-методической конференции преподавателей и студентов СГУ. Ч. II. Ставрополь: ООО «Издательско-информационный центр “Фабула”», 2011. С. 26–29.
11. Тышляр Т. Е. Построение нейронной сети для определения особых точек линейного комплекса плоскостей категории A_1 // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского: Материалы Десятой молодежной научной школы-конференции «Лобачевские чтения – 2010». Казань, 31 октября – 4 ноября 2011 г.; Казан. матем. об-во. Казань: Казан. матем. об-во, 2011. Т. 44. С. 289–291.
12. Тышляр Т. Е. Построение нейронной сети для классификации особых точек линейного комплекса плоскостей типа A_2 // Материалы 57-й научно-методической конференции «Университетская наука – региону». Ставрополь: Издательско-информационный центр “Фабула”, 2012. Ч. I. С. 204–207.
13. Тышляр Т. Е. Построение нейронных сетей для классификации точек линейных комплексов плоскостей типов A_3 и A_4 // Сборник научных трудов пятой международной научно-технической конференции «Инфокоммуникационные технологии в науке, производстве и образовании (Инфоком-5)». Ч. 1. Ставрополь, 2012. С. 134–137.