Таким образом, в этом случае возможно сосуществование конкурентов. Смысл этого таков: благодаря рекламе каждая из фирм создаёт свою нишу, в которой потребители предпочитают приобретать товар именно этой фирмы и тогда, фактически, конкуренты сосуществуют независимо.

Литература

1. Романов М. Ф., Федоров М. П. Математические модели в экологии. СПб.: «Иван Федоров», 2003. 240 с.
2. Чернавский Д. С., Щербаков А. В., Зульпукаров М. М. Модель конкуренции. М.: Препринт ИПМ № 64. 2006.
3. Притула Т. К., Адамчук А. С., Амироков С. Р. Об устойчивых состояниях трехвидовой вольтерровской системы: материалы 5-й международной научно-технической конференции ИНФОКОМ–5 Инфокоммуникационные технологии в науке, производстве и образовании. Ч. 1. Ставрополь: СевКавГТИ, 2012. С. 105–109.
4. Свирежев Ю. М., Пасеков В. П. Основы математической генетики. М.: Наука, 1978. 272 с.

УДК 519.63

Григорян Лусине Арсеновна

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИИ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В статье рассматривается задача непоршневого вытеснения нефти водой, построена численная модель фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости.

Ключевые слова: фильтрация, несжимаемая жидкость, модель Баклея – Леверетта.

Grigoryan Lusine Arsenovna

MODELING OF TWO-PHASE FLUID FILTRATION FINITE ELEMENT METHOD

The problem of oil production by means of non-piston water displacement is considered. The numerical model for twophase incompressible fluid filtration is designed.

Key words: filtration, non-piston water, Bakly – Leveretta model.

Добыча нефти в большинстве случаев происходит при вытеснении ее в поровом пространстве продуктивного пласта водой или газом. Этот процесс применяется при естественных режимах эксплуатации и при искусственных методах поддержания пластового давления заводнением или нагнетанием газа. Теория многофазной многокомпонентной фильтрации служит основой для расчета таких процессов.

В настоящее время одно- и двухмерные задачи фильтрации многофазной жидкости хорошо изучены. Для них построены модели и схемы расчета. Однако с учетом активного развития вычислительной техники новая архитектура предъявляет особые требования к алгоритмам и их реализации. Для уменьшения времени решения задач необходимо применение параллельных вычислительных алгоритмов. Во многих работах рассматриваются общие методы решения двухмерных задач фильтрации для малого числа процессов и грубых сеток.

Рассмотрим фильтрацию двухфазной жидкости, состоящей из нефти (w) и воды (o), сквозь пористую среду в водонапорном режиме. Предполагается, что жидкости несжимаемые, пористая среда – недеформируемая. Месторождение покрыто сетью скважин двух типов: водонагнетающих и продуктивных. Схемы их расположения могут быть различными. Нефтеносный пласт считается неограниченным, постоянной толщины, пористая среда – недеформируемой, отношение капиллярного давления к полному гидродинамическому падению давления мало. Это позволяет рассмотреть трехмерную задачу без учета капиллярных и гравитационных сил, тогда течение двух фаз подчиняется классической модели Бакли – Леверетта:

$$m\frac{\partial S}{\partial t}+div(F(S)K(S)gradP)=Q^{w}, \qquad (1.1)$$

$$Q^{w}=\begin{cases} q\cdot F(S^{*}) - \text{на источниках}, \\ q\cdot F(S) \ - \text{в остальной области}. \end{cases}$$

$$div(K(S)gradP) = q, \tag{1.2}$$

$$F(S) = \frac{k_w(S)/\mu_w}{k_w(S)/\mu_w + k_o(S)/\mu_o}, \tag{1.3}$$

$$K(S) = -k \cdot \left(\frac{k_w(S)}{\mu_w} + \frac{k_o(S)}{\mu_o} \right). \tag{1.4}$$

Здесь m – пористость; S – водонасыщенность; $F(S)$ – функция Бакли-Леверетта; $K(S)$ – нелинейный коэффициент, включающий проницаемости и вязкости; P – давление в пласте; q – дебиты в скважинах; $\overline{S}$ – критическая водонасыщенность; $k_w(S)$ – относительная проницаемость воды, $k_o(S)$ – относительная проницаемость нефти; μ_w и μ_o – вязкости воды нефти; H – мощность пласта. Требуется определить функции давления P, водонасыщенности S, которые удовлетворяют системе (1.1)–(1.2).

Исходная система уравнений (1.1)–(1.2) приводит к неоднозначности решения, поэтому на границах разрыва должны выполняться условия сопряженности:

- непрерывность функции давления;
- сохранение массы общего потока жидкостей;
- сохранение массы каждой из фаз;
- постоянство фронтальной насыщенности.

Разностные методы ее решения в большинстве случаев – единственный способ получить результат.

Предположим, имеется горизонтальный пласт постоянной толщины, с достаточно большой протяженностью. Рассмотрим трехмерную математическую модель двухфазной фильтрации несмешиваемых несжимаемых жидкостей.

Пусть нефтяное месторождение – некоторое объемное тело Ω, с границей $\partial\Omega$, которая будет обозначать условный контур нефтеносности. Ввиду того, что граница области имеет сложную геометрию, целесообразно для решения задачи использовать метод фиктивных областей. Дополним рассматриваемую область до стандартной области расчета – до прямоугольного параллелепипеда Ω_1. Согласно этому, имеем краевую задачу (1.1)–(1.2). На границе $\partial\Omega_1$ введем условия непроницаемости:

$$\frac{\partial P}{\partial n} = 0 \ , \quad (x,y,z) \in \partial\Omega_1$$

$$\frac{\partial S}{\partial n} = 0 \, , \quad (x,y,z) \in \partial\Omega_1$$

Начальное условие:

$$s(x,y,z,t) = s_0 \geq \underline{S} \ , \ p(0,y,z) = p_0 \ (x,y,z) \in \partial\Omega_1$$

На эксплуатационных и нагнетательных скважинах заданы величины забойных давлений. В области Ω_1 введем равномерную пространственную сетку с шагом так, чтобы скважины попадали в один из углов сетки и неравномерную временную сетку. Система уравнений (1.1)–(1.2) аппраксимируется в консервативные разностные уравнения вида:

$$\begin{aligned} &\left(p_{i-1,j,k} - p_{i,j,k}\right) B_{i-1,i,i} - \left(p_{i,j,k} - p_{i+1,j,k}\right) B_{i,i+1,i} + \\ &+ \left(p_{i,j-1,k} - p_{i,j,k}\right) B_{j,j-1,j} - \left(p_{i,j,k} - p_{i,j+1,k}\right) B_{j,j+1,j} + \\ &+ \left(p_{i,j,k-1} - p_{i,j,k}\right) B_{k,k,k-1} - \left(p_{i,j,k} - p_{i,j,k+1}\right) B_{k,k,k+1} = \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 0 & \textit{– узел сетки вне скважины,} \\ q_{i,j,k}(p_{i,j,k} - p_N) & \textit{– узел находится на нагнетательной скважине } N, \\ q_{i,j,k}(p_{i,j,k} - p_L) & \textit{– узел находится на эксплуатационной скважине.} \end{cases}$$

$$\left(\delta_1^- f_{i-1,j,k} + \delta_1^+ f_{i,j,k}\right)\left(p_{i-1,j,k} - p_{i,j,k}\right)B_{i,i-1,i} - \left(\delta_2^- f_{i,j,k} + \delta_2^+ f_{i+1,j,k}\right)\left(p_{i,j,k} - p_{i+1,j,k}\right)B_{i,i+1,i} +$$
$$+\left(\delta_3^- f_{i,j-1,k} + \delta_3^+ f_{i,j,k}\right)\left(p_{i,j-1,k} - p_{i,j,k}\right)B_{j,j-1,j} - \left(\delta_4^- f_{i,j,k} + \delta_4^+ f_{i,j+1,k}\right)\left(p_{i,j,k} - p_{i,j+1,k}\right)B_{j,j+1,j} +$$
$$+\left(\delta_5^- f_{i,j,k-1} + \delta_5^+ f_{i,j,k}\right)\left(p_{i,j,k-1} - p_{i,j,k}\right)B_{k,k,k-1} - \left(\delta_6^- f_{i,j,k} + \delta_6^+ f_{i,j,k+1}\right)\left(p_{i,j,k} - p_{i,j,k+1}\right)B_{k,k,k+1} -$$
$$-mHh^2 \frac{\sigma_{i,j,k}^{n+1} - \sigma_{i,j,k}^{n}}{\tau} = \begin{cases} 0 & -\text{ узел сетки вне скважины,} \\ q_{i,j,k} f_{i,j,k}(p_N - p_{i,j,k}) & -\text{ узел находится на нагнетательной скважине } L, \\ q_{i,j,k} f_{i,j,k}(p_L - p_{i,j,k}) & -\text{ узел находится на эксплуатационной скважине.} \end{cases}$$

Где $i = 1,2,\ldots,n_1 - 1$, $j = 1,2,\ldots,n_2 - 1$, $k = 1,2,\ldots,n_3 - 1$, δ — указывает на то, что доля воды в потоке определяется по водонасыщенности того элементарного объема, из которого этот поток вытекает.

По мнению ряда авторов, использование схем, ориентированных против потока членов с производными первого порядка приводит к гораздо большему повышению устойчивости метода решения, чем для схем, включающих центральные разности.

Система явных разностных уравнений для аппроксимации уравнения (1.2) позволяет уменьшить до минимума размазывание фронта скачка водонасыщенности.

Численные эксперименты показывают, что уравнение (1.2) более точно описывает процесс в скважине, если эту задачу аппроксимировать в узле-скважине.

При замене дифференциального уравнения разностной схемой возникает погрешность, называемая погрешностью аппроксимации. Схема имеет второй порядок аппроксимации $O(\tau^2)$ для временных переменных и $O(h^2)$ для пространственных. Получена оценка погрешности $O(h^2 + \tau^2)$.

При использовании разностных схем входные данные задаются с определенной погрешностью. В процессе реализации задачи появляются другие ошибки, связанные с округлением. Поэтому одним из требований к разностной схеме является устойчивость. Для исследования устойчивости схемы линеаризуем (1.2), записанное в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[f(\sigma_w)\cdot w_x\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[f(\sigma_w)\cdot w_y\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[f(\sigma_w)\cdot w_z\right] = -mH\frac{\partial \sigma}{\partial t},$$

получим $\quad b_1\frac{\partial\sigma}{\partial x} + b_2\frac{\partial\sigma}{\partial y} + b_3\frac{\partial\sigma}{\partial z} = -\frac{\partial\sigma}{\partial t}$, где

$$b_1 = \frac{w_x \dfrac{\partial f(\sigma_w)}{\partial \sigma_w}}{mH}, \quad b_2 = \frac{w_y \dfrac{\partial f(\sigma_w)}{\partial \sigma_w}}{mH}, \quad b_3 = \frac{w_z \dfrac{\partial f(\sigma_w)}{\partial \sigma_w}}{mH}.$$

Составим разностную схему, ориентированную против потока, если $w_x > 0, w_y > 0$, $w_z > 0$:

$$\frac{b_{1i,j,k}}{h}\left(\sigma_{i,j,k}^n - \sigma_{i-1,j,k}^n\right) + \frac{b_{2i,j,k}}{h}\left(\sigma_{i,j,k}^n - \sigma_{i,j-1,k}^n\right) + \frac{b_{3i,j,k}}{h}\left(\sigma_{i,j,k}^n - \sigma_{i,j,k-1}^n\right) = -\frac{\sigma_{i,j,k}^{n+1} - \sigma_{i,j,k}^n}{\tau}.$$

Из последнего

$$\sigma_{i,j,k}^{n+1} = \sigma_{i,j,k}^n - \frac{\Delta t}{h}b_{1i,j,k}(\sigma_{i,j,k}^n - \sigma_{i-1,j,k}^n) - \frac{\Delta t}{h}b_{2i,j,k}(\sigma_{i,j,k}^n - \sigma_{i,j-1,k}^n) - \frac{\Delta t}{h}b_{3i,j,k}(\sigma_{i,j,k}^n - \sigma_{i,j,k-1}^n) =$$
$$= \sigma_{i,j,k}^n\left(1 - \frac{\Delta t}{h}b_{1i,j,k} - \frac{\Delta t}{h}b_{2i,j,k} - \frac{\Delta t}{h}b_{3i,j,k}\right) + \frac{\Delta t}{h}b_{1i,j,k}\sigma_{i-1,j,k}^n + \frac{\Delta t}{h}b_{2i,j,k}\sigma_{i,j-1,k}^n + \frac{\Delta t}{h}b_{3i,j,k}\sigma_{i,j,k-1}^n.$$

Покажем, что при

$$1 - \frac{\Delta t}{h}b_{1i,j,k} - \frac{\Delta t}{h}b_{2i,j,k} - \frac{\Delta t}{h}b_{3i,j,k} \geq 0 \tag{1.5}$$

или

$$\Delta t \leq \frac{h}{\max\limits_{i,j,k}(b_{1i,j,k} + b_{2i,j,k} + b_{3i,j,k})} \tag{1.6}$$

схема удовлетворяет принципу максимума в предположении неизменности коэффициентов дифференциального уравнения. При выполнении (1.6) выполняется (1.5), значит, можно записать:

$$\left|\sigma_{i,j,k}^{n+1}\right| \le \left(1-\frac{\Delta t}{h}b_{1i,j,k}-\frac{\Delta t}{h}b_{2i,j,k}-\frac{\Delta t}{h}b_{3i,j,k}\right)\max_{i,j,k}\left|\sigma_{i,j,k}^{n}\right|+$$

$$+\frac{\Delta t}{h}b_{1i,j,k}\max_{i,j,k}\left|\sigma_{i,j,k}^{n}\right|+\frac{\Delta t}{h}b_{2i,j,k}\max_{i,j,k}\left|\sigma_{i,j,k}^{n}\right|+\frac{\Delta t}{h}b_{3i,j,k}\max_{i,j,k}\left|\sigma_{i,j,k}^{n}\right|=\max_{i,j,k}\left|\sigma_{i,j,k}^{n}\right|=\left\|\sigma^{n}\right\|.$$

Неравенство справедливо для всех n, следовательно, устойчивость имеет место. При этом условие устойчивости для произвольно ориентированных потоков есть

$$\tau \le \frac{min(m)h}{\max(\omega)\max\left(\dfrac{\partial f(\sigma)}{\partial\sigma}\right)}.$$

Численные эксперименты, выполненные рядом авторов, позволили сделать вывод о том, что устойчивость сохраняется, если шаг в системе явных разностных уравнений выбирать из условия

$$\max_{i.j,k}\left\{\sigma_{i,j,k}^{n+1}-\sigma_{i,j,k}^{n}\right\}\le 10^{-2}.$$

Процесс решения системы уравнений организован следующим образом: на каждом временном слое определяется водонасыщенность при фиксированном давлении, затем находится давление на текущем слое с учетом найденного значения водонасыщенности, затем осуществляется переход к следующему временному шагу. Метод верхней релаксации для ускорения сходимости итераций неявной разностной схемы применяется для распараллеливания алгоритма в дальнейшем.

Литература

1. Басниев К. М., Власов А. М., Кочина И. Н. Подземная гидродинамика. М.: Наука, 1986. 303 с.
2. Коновалов А. Н. задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск: Наука, 1988.
3. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с.

УДК 537.9

Диканский Юрий Иванович, Борисенко Олег Васильевич, Беджанян Марита Альбертовна

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНОЙ ПЛОТНОСТИ ПОЛЯРИЗАЦИОННОГО ЗАРЯДА СТРУИ МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ В ОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Статья посвящена актуальной проблеме исследования поведения струй магнитной жидкости в электрическом и магнитном полях. Предложен метод расчёта величины плотности формирующегося на поверхности струй заряда, выдвинуто предположение о механизме его формирования.

Ключевые слова: магнитная жидкость, поверхностная плотность заряда.

Dikansky Yuriy Ivanovich, Borisenko Oleg Vasil’evich, Bedzhanyan Marita Albertovna

DETERMINATION OF THE SURFACE DENSITY OF POLARIZATION CHARGE OF THE MAGNETIC FLUID JET IN UNIFORM ELECTRIC FIELD

The article is dedicated to an actual problem of the study of the behavior of the magnetic fluid jet in electrical and magnetic fields. A new method of calculation of value of density of the surface charge formed on the magnetic fluid jet surface is proposed; the hypothesis of surface charge formation mechanism is presented.

Key words: magnetic fluid, surface charge dencity.

Исследованию поведения струй в силовых полях ранее уделялось внимание в ряде работ [1–3], при этом усиление интереса к таким исследованиям произошло после синтеза магнитных жидкостей, способных эффективно взаимодействовать как с электрическими, так и магнитными полями. Следует