

ФИЗИКА, МАТЕМАТИКА

УДК 517.2

Амироков Станислав Рауфович, Адамчук Анна Станиславовна

ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЙ СТРУКТУРЫ МОДЕЛИ КОНКУРЕНЦИИ ТРЕХ СООБЩЕСТВ

В статье рассматривается взаимодействие трех сообществ в ходе сравнения модели конкуренции трех фирм в экономике и трехвидовой генетической модели репродукции ДНК. Исследованы условия сосуществования.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, устойчивость, рыночная экономика, модель, параметр.

Amirokov Stanislav Raufovich, Adamchuk Anna Stanislavovna

RESEARCH OF CHANGES OF STRUCTURE OF MODEL OF THE COMPETITION OF THREE COMMUNITIES

Interaction of three communities is considered during comparison of model of the competition of three firms in economy and three-specific genetic model of a reproduction of DNA. Coexistence conditions are investigated.

Key words: differential equations, stability, market economy, model, parameter.

Для исследования динамики изменения численности сообществ в процессе их взаимодействия во многих случаях используется система дифференциальных уравнений вольтерровского типа:

$$\dot{u}_i = u_i \left(\mu_i - \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} u_j \right), \quad i = \overline{1, n}. \quad (1)$$

Такие системы были получены изначально для моделирования взаимодействий популяций в экологии [1], однако к настоящему времени нашли широкое применение для описания конкурентной борьбы в экономике, социологии, и даже в политике. Поэтому особую роль приобретают условия «сосуществования» сообществ, а значит – вопросы устойчивости решений таких систем.

Одним из необходимых условий рыночной экономики считается наличие конкуренции, однако вопросы о методах конкуренции до сих пор остаются дискуссионными, как и вопрос о возможности сосуществования многих фирм на рынке с целью демонполизации товаров и услуг.

В работе [2] была рассмотрена модель конкуренции двух фирм – производителей товаров долговременного пользования. Было показано, что при отсутствии внеырыночных методов регулирования происходит монополизация (вытеснение одного из конкурентов), даже если конкуренты полностью равноправны.

Отмечено [2], что конкуренция имеет место между производителями взаимозаменяемых (и даже однотипных) товаров. Производители взаимодополняющих товаров чаще вступают в договорные отношения (образуют симбиоз). Кроме того, производители товаров I категории (жизненно необходимых, таких как пища, энергоресурсы и т. п.), как правило, контролируются либо государством, либо структурами его заменяющими и часто являются естественными монополиями. В этих условиях роль конкуренции существенно снижается. Поэтому, следует рассматривать конкуренцию между производителями товаров II категории (то есть, товаров долговременного пользования).

Заметим также, что в разных слоях общества шкала предпочтений разных свойств качества товара различна. Особую роль также играет цена продукта, поскольку потребитель обычно ориентируется не на само качество, а на отношение цены к качеству.

Обратимся теперь к модели конкуренции трех фирм в экономике. Примем положение [2], что в каждом слое общества, где потребители имеют примерно одинаковые доходы, живут в одинаковых условиях и имеют одинаковую шкалу предпочтений, конкурируют фирмы, производящие однотип-

ные товары, то есть сходные по цене и качеству. Производители же товаров другого качества и цены конкурируют в другой рыночной нише.

Введем обозначения, аналогично [2]. Пусть N – число потребителей производимого продукта, S – доходы потребителей данного продукта (в первом приближении можно считать, что доходы всех потребителей одинаковы), M – оборотные средства предприятия, τ – длительность производственного цикла, p – рыночная цена товара, P – себестоимость продукта, δ – доля оборотных средств, идущих на покрытие переменных издержек, k – постоянные издержки, которые не зависят от количества выпускаемой продукции, $Q(S/p)$ – функция спроса, зависящая от отношения дохода к цене и равна количеству продукта, потребляемому потребителем в единицу времени.

Рассмотрим три фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. В этом случае на рынке устанавливается единая цена, которая определяется балансом суммарного предложения и спроса, то есть конкурентная борьба ведется только рыночными методами. Конкуренты в рамках этой модели не могут «назначать» цену или влиять на потребителей иначе, чем путем изменения параметров своего производства.

Рассмотрим симметричный случай, когда параметры фирм одинаковы. Учтем в симметричной модели постоянные затраты. Тогда модель можно представить в виде:

$$\begin{aligned}\frac{dM_1}{dt} &= M_1 - bM_1M_2 - bM_1M_3 - bM_1^2 - k_1', \\ \frac{dM_2}{dt} &= M_2 - bM_1M_2 - bM_3M_2 - bM_2^2 - k_2', \\ \frac{dM_3}{dt} &= M_3 - bM_1M_3 - bM_3M_2 - bM_3^2 - k_3'.\end{aligned}\quad (2)$$

Сравним эту модель с рассмотренной в работе [3] простейшей моделью конкуренции для частного случая взаимодействия 3-х разных объектов модели репродукции ДНК, то есть систему из 3-х уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{dU_1}{dt} &= U_1 - U_1U_2 - U_1U_3 - a * U_1^2, \\ \frac{dU_2}{dt} &= U_2 - U_1U_2 - U_2U_3 - a * U_2^2, \\ \frac{dU_3}{dt} &= U_3 - U_1U_3 - U_2U_3 - a * U_3^2.\end{aligned}\quad (3)$$

где U_1 – концентрация объектов 1-го типа, U_2 – концентрация объектов 2-го типа, U_3 – концентрация объектов 3-го типа, a – коэффициент внутривидового антагонизма.

Система (3) имеет 8 точек покоя:

$$\begin{aligned}1. & U_1 = U_2 = U_3 = 0; \\ 2. & U_1 = 0, U_2 = \frac{1}{a}, U_3 = 0; \\ 3. & U_1 = \frac{1}{a}, U_2 = 0, U_3 = 0; \\ 4. & U_1 = 0, U_2 = 0, U_3 = \frac{1}{a}; \\ 5. & U_1 = 0, U_2 = \frac{1}{a+1}, U_3 = \frac{1}{a+1}; \\ 6. & U_1 = \frac{1}{a+1}, U_2 = \frac{1}{a+1}, U_3 = 0; \\ 7. & U_1 = \frac{1}{a+1}, U_2 = 0, U_3 = \frac{1}{a+1}; \\ 8. & U_1 = \frac{1}{a+2}, U_2 = \frac{1}{a+2}, U_3 = \frac{1}{a+2}.\end{aligned}\quad (4)$$

Исследуем систему (3) на устойчивость.

а) для нулевого решения в точке 1, практически неинтересного, соответствующее характеристическое уравнение имеет корни: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, которые действительны и положительны. Следовательно, точка $U_1 = U_2 = U_3 = 0$ – неустойчивый узел;

б) исследуем устойчивость стационарных состояний в точках 2, 3, 4 методом Ляпунова на примере: $U_1 = \frac{1}{a}, U_2 = 0, U_3 = 0$. Введем новую переменную ξ , характеризующую отклонение переменной U_1 от нулевого состояния

$U_1(t) = \xi(t) + \frac{1}{a}$. Линеаризованная система в новых переменных имеет вид:

$\frac{d\xi}{dt} = -\xi - \frac{U_2}{a} - \frac{U_3}{a}$, $\frac{dU_2}{dt} = \left(1 - \frac{1}{a}\right)U_2$, $\frac{dU_3}{dt} = \left(1 - \frac{1}{a}\right)U_3$, корни характеристического уравнения которой: $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = \frac{a-1}{a}$; $\lambda_3 = \frac{a-1}{a}$. Очевидно, характер этой особой точки зависит от выбора параметра a .

Если, $0 < a < 1$, то все корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0$. Следовательно, при $0 \leq a < 1$ особая точка $U_1 = \frac{1}{a}, U_2 = 0, U_3 = 0$ – устойчивый узел. Если $a > 1$, то корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ разных знаков. Значит, при $a > 1$ особая точка $U_1 = \frac{1}{a}, U_2 = 0, U_3 = 0$ – седло.

Аналогичная ситуация характерна для стационарных решений 3, 4. Это состояние неустойчиво. В каждой из трех областей притяжения один из конкурентов полностью вытесняет других;

в) стационарные точки 5, 6, 7 также исследуем методом Ляпунова на примере точки: $U_1 = 0, U_2 = \frac{1}{a+1}, U_3 = \frac{1}{a+1}$.

Введем новые переменные ξ, η , характеризующие отклонения переменных U_2 и U_3 от нулевого состояния $U_2(t) = \xi(t) + \frac{1}{a+1}$, $U_3(t) = \eta(t) + \frac{1}{a+1}$.

Линеаризованная система в новых переменных имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{dU_1}{dt} &= \left(1 - \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+1}\right)U_1, \\ \frac{d\xi}{dt} &= \left(-\frac{1}{a+1}\right)U_1 + \left(1 - \frac{1}{a+1} - \frac{2a}{a+1}\right)\xi + \left(-\frac{1}{a+1}\right)\eta, \\ \frac{d\eta}{dt} &= \left(-\frac{1}{a+1}\right)U_1 + \left(-\frac{1}{a+1}\right)\xi + \left(1 - \frac{1}{a+1} - \frac{2a}{a+1}\right)\eta.\end{aligned}$$

Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \frac{a-1}{a+1}$, $\lambda_3 = -\frac{a-1}{a+1}$ всегда имеют различные знаки. Следовательно, тип этой особой точки – седло. Аналогичная ситуация характерна для стационарных решений 6, 7. Во всех трех областях притяжения около этих точек состояние неустойчиво, два конкурента вытесняют третьего.

г) в точке 8: $U_1 = \frac{1}{a+2}, U_2 = \frac{1}{a+2}, U_3 = \frac{1}{a+2}$ аналогично введем новые переменные μ, ξ, η , характеризующие отклонения переменных U_1, U_2 и U_3 от нулевого состояния. Корни характеристического уравнения соответствующей линеаризованной системы в этом случае имеют вид: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -\frac{a-1}{a+2}$, $\lambda_3 = -\frac{a-1}{a+2}$, так что характер этой особой точки существенно зависит от выбора параметра a .

Если $0 < a < 1$, то корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ разных знаков. Значит, при $0 < a < 1$ особая точка $U_1 = \frac{1}{a+2}$, $U_2 = \frac{1}{a+2}$, $U_3 = \frac{1}{a+2}$ – седло. Если $a > 1$, то все корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 < 0$. Следовательно, при $a > 1$ эта особая точка – устойчивый узел.

При решении системы (1) смысл имеют только неотрицательные решения, кроме того, известно [4], что эти модели плохо описывают динамику сообщества, если его численность близка к нулю, поскольку в этом случае вид может исчезнуть в результате действий случайных факторов, которые не отражены в соответствующем уравнении системы.

Таким образом, когда внутривидовой антагонизм меньше межвидового ($a < 1$), в модели (1) происходит ситуация, когда остаётся одно из взаимодействующих сообществ, а все остальные пропадают. Состояние, где все U_i одинаковы, неустойчиво; какая из популяций победит, зависит от начальной концентрации и случайных флуктуаций.

Однако вышеприведенные расчеты показывают, что для трехвидовой системы существует ненулевое стационарное состояние при $a > 1$, т.е. при более активном внутривидовом взаимодействии объектов существует возможность «сосуществования».

На рисунке приведено графическое решение системы (2) при $a = 2$ с начальными условиями $U_1(0) = 1$, $U_2(0) = 2$, $U_3(0) = 3$, полученное с помощью программы Mathcad. Графики показывают, что при одинаковых параметрах воспроизводства и внутривидового взаимодействия объектов различные ненулевые начальные условия не оказывают существенного влияния на наличие стационарного состояния.

Сравнивая систему (3) с системой (2) модели конкуренции трех фирм в экономике, сразу можно отметить, что система (3) неустойчива (седло). В каждой из областей притяжения один или два из конкурентов полностью вытесняет других.

Однако все меняется, если учесть в рамках симметричной модели эффект рекламы. Как упоминалось в [2], эффект рекламы выходит за рамки чисто экономических. В результате рекламы фирмы получают дополнительные доходы: $\delta_i M_i$ ($i = 1, 2, 3$). Из предпринимательской практики известно, что расходы на рекламу R_i зависят от доходов $\delta_i M_i$, причем, не линейно, а в более высокой степени. Примем, что расходы растут квадратично, то есть

$$R_i = \alpha (\delta_i M_i)^2, \quad i = 1, 2, 3.$$

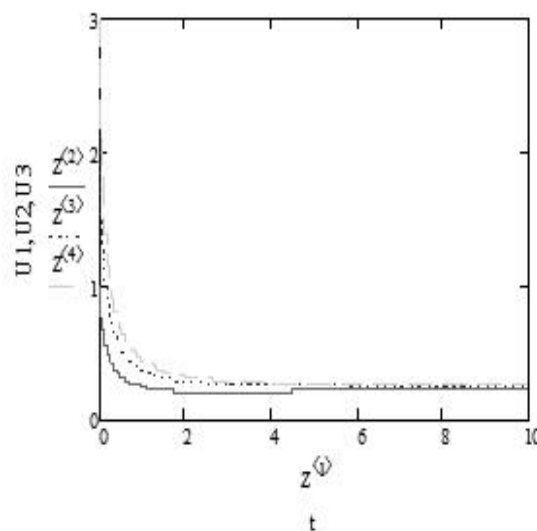
где α – феноменологический коэффициент. В оптимальном режиме работы предприятия в каждом уравнении появляется сумма:

$$S_i = \delta_i M_i - \alpha (\delta_i M_i)^2, \quad i = 1, 2, 3.$$

Фактически, это означает, что каждая фирма, благодаря рекламе, обеспечивает постоянный (не зависящий от оборотных средств) доход. Если для простоты положить все суммы одинаковыми, модель можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \frac{dM_1}{dt} &= M_1 - bM_1M_2 - bM_1M_3 - bM_1^2 - k_1 + S, \\ \frac{dM_2}{dt} &= M_2 - bM_1M_2 - bM_3M_2 - bM_2^2 - k_2 + S, \\ \frac{dM_3}{dt} &= M_3 - bM_1M_3 - bM_3M_2 - bM_3^2 - k_3 + S, \end{aligned} \quad (5)$$

и тогда система (5) в случае $S > k_i$ имеет устойчивое стационарное состояние, как и система (3).



Графики $U_1(t)$, $U_2(t)$, $U_3(t)$ при $a = 2$ и начальных условиях $U_1(0) = 1$, $U_2(0) = 2$, $U_3(0) = 3$

Таким образом, в этом случае возможно сосуществование конкурентов. Смысл этого таков: благодаря рекламе каждая из фирм создаёт свою нишу, в которой потребители предпочитают приобретать товар именно этой фирмы и тогда, фактически, конкуренты сосуществуют независимо.

Литература

1. Романов М. Ф., Федоров М. П. Математические модели в экологии. СПб.: «Иван Федоров», 2003. 240 с.
2. Чернавский Д. С., Щербakov А. В., Зульпукаров М. М. Модель конкуренции. М.: Препринт ИПМ № 64. 2006.
3. Притула Т. К., Адамчук А. С., Амироков С. Р. Об устойчивых состояниях трехвидовой вольтерровской системы: материалы 5-й международной научно-технической конференции ИНФОКОМ–5 Инфокоммуникационные технологии в науке, производстве и образовании. Ч. 1. Ставрополь: СевКавГТИ, 2012. С. 105–109.
4. Свирежев Ю. М., Пасеков В. П. Основы математической генетики. М.: Наука, 1978. 272 с.

УДК 519.63

Григорян Лусине Арсеновна

МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИИ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В статье рассматривается задача непоршневого вытеснения нефти водой, построена численная модель фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости.

Ключевые слова: фильтрация, несжимаемая жидкость, модель Бакля – Леверетта.

Grigoryan Lusine Arsenovna

MODELING OF TWO-PHASE FLUID FILTRATION FINITE ELEMENT METHOD

The problem of oil production by means of non-piston water displacement is considered. The numerical model for twophase incompressible fluid filtration is designed.

Key words: filtration, non-piston water, Bakly – Leveretta model.

Добыча нефти в большинстве случаев происходит при вытеснении ее в поровом пространстве продуктивного пласта водой или газом. Этот процесс применяется при естественных режимах эксплуатации и при искусственных методах поддержания пластового давления заводнением или нагнетанием газа. Теория многофазной многокомпонентной фильтрации служит основой для расчета таких процессов.

В настоящее время одно- и двумерные задачи фильтрации многофазной жидкости хорошо изучены. Для них построены модели и схемы расчета. Однако с учетом активного развития вычислительной техники новая архитектура предъявляет особые требования к алгоритмам и их реализации. Для уменьшения времени решения задач необходимо применение параллельных вычислительных алгоритмов. Во многих работах рассматриваются общие методы решения двумерных задач фильтрации для малого числа процессов и грубых сеток.

Рассмотрим фильтрацию двухфазной жидкости, состоящей из нефти (w) и воды (o), сквозь пористую среду в водонапорном режиме. Предполагается, что жидкости несжимаемые, пористая среда – недеформируемая. Месторождение покрыто сетью скважин двух типов: водонагнетающих и продуктивных. Схемы их расположения могут быть различными. Нефтеносный пласт считается неограниченным, постоянной толщины, пористая среда – недеформируемой, отношение капиллярного давления к полному гидродинамическому падению давления мало. Это позволяет рассмотреть трехмерную задачу без учета капиллярных и гравитационных сил, тогда течение двух фаз подчиняется классической модели Бакли – Леверетта:

$$m \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}(F(S)K(S)\operatorname{grad}P) = Q^w, \quad (1.1)$$

$$Q^w = \begin{cases} q \cdot F(S^*) & \text{— на источниках,} \\ q \cdot F(S) & \text{— в остальной области.} \end{cases}$$