

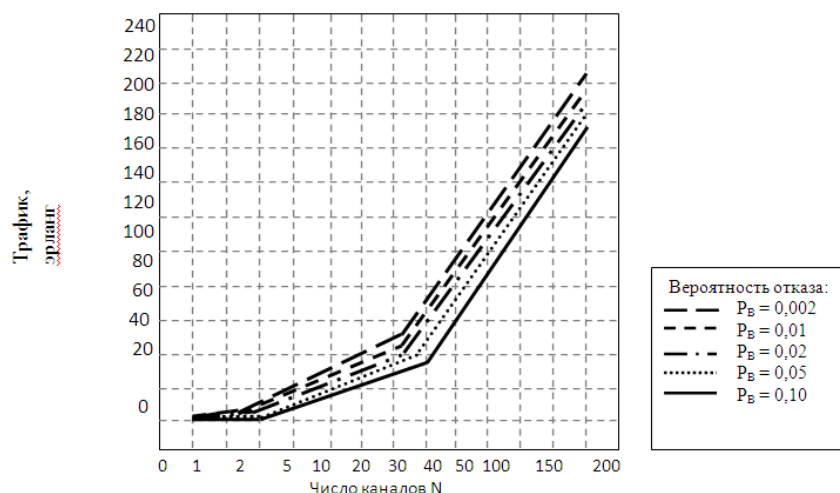


Рис. 6. Зависимость $p_{отк}$ от нагрузки

Литература

1. Тихоненко О. М. Модели массового обслуживания в информационных системах: учебное пособие. Минск: УП «Технопринт», 2003. 327 с.

УДК 517.968.7

Обласова Ирина Николаевна, Ширяева Наталья Васильевна

ОБОСНОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СИНГУЛЯРНО ЗАКРЕПЛЕННОЙ КОНСОЛИ

Рассмотрена математическая модель протяженной одномерной упругой системы типа балки – консоли с нерегулярными взаимодействиями с внешней средой. Построенное интегро-дифференциальное уравнение имеет физическую природу, возникая из задачи минимизации функционала энергии для консоли.

Ключевые слова: сингулярно закрепленная консоль, краевая задача, интегро-дифференциальное уравнение, реальная деформация консоли, функция влияния.

Oblasova Irina, Shiryaeva Natalia

THE JUSTIFICATION OF MATHEMATICAL MODEL FOR SINGULARLY FIXED CONSOLE

The article is dedicated to mathematical model continuous one-dimensional elastic system of beam type- a consoles with irregular interaction with external ambience. Built integro-differential equation has a physical nature, arising from the problem of minimization of the energy functional for the console.

Key words: singularly fixed console, boundary value problem, integro-differential equation, the real deformation of the console function of influence.

Одной из базовых математических моделей инженерной математики и строительной механики является уравнение $(EJu'')''=f$, с которым можно ознакомиться в курсе «Сопротивление материалов». Это уравнение, введенное более 200 лет назад Эйлером и Бернулли, описывает упругие деформации стержня (балки). Это уравнение не зависит от условий закрепления концов, которые в интересующем нас случае (и наиболее сложно в инженерном плане) имеют вид $u(0)=u'(0)=0$ и $u'(l)=u'''(l)=0$.

Первое условие означает, что левый конец наглухо зашпелен, а второе – что правый конец свободен. Функция $f(x)$ определяется внешней нагрузкой.

Стандартные для инженерной практики расчеты проводятся для случаев, когда E – модуль Юнга и $J(x)$ – момент инерции поперечного сечения постоянны. Если при этом и $f(x)=const$, то уравнение $(EJu'')''=f$ решается напрямик по стандартным правилам и заложенным в стандартные пакеты для ПК. На возможности решить такое уравнение явно построены и все основные формулы сопромата.

Но давайте представим себе достаточно реальную практическую ситуацию, когда наш стержень – по типу стрелы подъемного крана – нагружен в какой-то точке $x=\xi$ локальной силой (подвешен груз) и, кроме того, в некоторой точке $x=\eta$ находится под воздействием упругой опоры (трос, удерживающий стрелу).

Тогда, как хорошо известно, в этих точках перерезывающая сила $(EJu'')'(x)$ испытывает скачок, причем в точке $x=\xi$ величина этого скачка известна заранее – она равна сосредоточенной в этой точке внешней нагрузки, а в точке $x=\eta$ величина этого скачка неизвестна.

В этих точках уравнение $(EJu'')''=f$ нарушается, и мы вместо одного уравнения и четырех условий (т. е. обычной краевой задачи) имеем уже три уравнения (на трех кусках) с дополнительными условиями согласования, математически очень неприятными, так как эти условия трудно признавать за краевые.

Еще сложнее оказывается задача с «хорошим», т. е. однородным стержнем, если речь идет о колебаниях, когда вместо внешней силы f в точке $x=\xi$ имеется сосредоточенная масса, т. е. уравнение $(EJu'')''=f$ заменится на

$$(pu'')''=\omega^2 mu,$$

где $m(x)$ содержит, как говорят физики, дельта-функцию. Кстати говоря, и в точке $x=\eta$ наличие упругой опоры тоже означает присутствие δ -функции, соответствующей сосредоточенному внешнему воздействию упругой опоры (троса).

Пусть вдоль отрезка $[0; 1]$ расположен стержень, помещенный в упругую среду, локальный коэффициент упругости которой равен dQ , левый конец которого закреплен, а правый – свободен. Полная энергия закрепленного таким образом стержня (консоли) определяется равенством:

$$\Phi(u) = \int_0^1 \frac{pu''^2}{2} dx + \int_0^1 \frac{u^2}{2} dQ - \int_0^1 u dF, \quad (1)$$

где p, Q, F – функции ограниченной на $[0; 1]$ функции, причем $p > 0$ жесткость стержня, $F(x)$ – перерезывающая сила.

Функционал (1) будем рассматривать на множестве

$$E = \{u \in C^1[0; 1] \text{ и } u'' \in BV[0; 1] \mid u(0) = u'(0) = 0\}$$

здесь $C^1[0; 1]$ – пространство один раз непрерывно дифференцируемых на $[0; 1]$ функций; $BV[0; 1]$ – пространство функций ограниченной на $[0; 1]$ вариации.

Исходя из принципа Гамильтона – реальная деформация $u_0(x)$ консоли дает минимум функционала (1) на E – будем иметь, что у функции h – произвольная фиксированная функция из E

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= \Phi(u_0 + \lambda h) = \\ &= \int_0^1 \frac{pu_0''^2}{2} dx + \lambda \int_0^1 pu_0'' h'' dx + \lambda^2 \int_0^1 \frac{ph''^2}{2} dx + \int_0^1 \frac{u_0^2}{2} dQ + \lambda \int_0^1 u_0 h dQ + \lambda^2 \int_0^1 \frac{h^2}{2} dQ - \int_0^1 h dF, \end{aligned} \quad (2)$$

$\lambda=0$ – есть точка минимума. Отсюда вытекает, что $\varphi'(0)=0$ (дифференцируемость φ вытекает очевидным образом из (2)), т. е.

$$\varphi'(0) = \int_0^1 u_0'' h'' + \int_0^1 u_0 h dQ - \int_0^1 h dF = 0, \quad (3)$$

для произвольной h из E .

Избавимся от произвола h . Для этого проинтегрируем дважды по частям второй и третий интегралы в (3), вводя обозначения

$$\alpha(x) = \int_0^x u_0(s) dQ(s), \quad (4)$$

$$\alpha^{(-1)}(x) = \int_0^x \alpha(t) dt \quad (5)$$

и

$$F^{(-1)}(x) = \int_0^x F(s) ds. \quad (6)$$

Имеем

$$\int_0^1 u_0 h dQ = \int_0^1 h d\alpha = h\alpha \Big|_0^1 - \int_0^1 \alpha dh = h(1)\alpha(1) - \int_0^1 \alpha h' dx.$$

Отсюда

$$\int_0^1 u_0 h dQ = h(1)\alpha(1) - \int_0^1 h' d\alpha^{(-1)} = h(1)\alpha(1) - h'\alpha^{(-1)} \Big|_0^1 + \int_0^1 \alpha^{(-1)} dh'.$$

Так как $h \in E$, то

$$\int_0^1 u_0 h dQ = h(1)\alpha(1) - h'(1)\alpha^{(-1)}(1) + \int_0^1 \alpha^{(-1)} dh'.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \int_0^1 h dF &= Fh \Big|_0^1 - \int_0^1 Fh' dx = F(1)h(1) - F^{(-1)}h' \Big|_0^1 + \int_0^1 F^{(-1)}h'' dx = \\ &= F(1)h(1) - F^{(-1)}(1)h'(1) + \int_0^1 F^{(-1)}h'' dx. \end{aligned}$$

Тогда (3) можно переписать в виде

$$h(1)\alpha(1) - h'(1)\alpha^{(-1)}(1) - F(1)h(1) + F^{(-1)}(1)h'(1) + \int_0^1 [pu_0'' + \alpha^{(-1)} - F^{(-1)}]h'' dx = 0 \quad (7)$$

для любой $h \in E$.

Лемма 1. Пусть $A(x) \in BV[0; 1]$. Для любой h , принадлежащей множеству

$$E_0 = \{h \in E \mid h(1) = h'(1) = 0\},$$

интеграл

$$\int_0^1 Ah'' dx \quad (8)$$

равен нулю. Тогда $A(x)$ на $[0; 1]$ есть тождественный нуль.

Доказательство. Так как для любых C_1 и C_2 интеграл

$$\int_0^1 (C_1 + C_2 x)h'' dx$$

равен

$$(C_1 + C_2)h'(1) - C_2h(1),$$

то равенство (8) можно заменить на

$$\int_0^1 (A(x) - C_1 - C_2 x)h'' dx + (C_1 + C_2)h'(1) - C_2h(1) = 0, \quad (9)$$

причем

$$A(x) - C_1 - C_2 x \in BV[0; 1].$$

Положим

$$h(x) = \int_0^x \left(\int_0^s (A(t) - C_1 - C_2 t) dt \right) ds.$$

Тогда

$$h'(x) = \int_0^x (A(t) - C_1 - C_2 t) dt,$$

причем $h(0) = h'(0) = 0$. Подберем C_1 и C_2 так, чтобы $h(1) = h'(1) = 0$. Для нахождения C_1 и C_2 имеем систему

$$\begin{cases} h'(1) = \int_0^1 A(t) dt - C_1 - \frac{C_2}{2} = 0, \\ h(1) = \int_0^1 \left(\int_0^s A(t) dt \right) ds - \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{6} = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} C_1 + \frac{C_2}{2} = \int_0^1 A(t) dt, \\ \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{6} = \int_0^1 \left(\int_0^s A(t) dt \right) ds. \end{cases}$$

Решая последнюю систему, найдем

$$C_1^* = 6 \int_0^1 \int_0^1 \left(\int_0^s A(t) dt \right) ds - \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{6} = 0, \quad A(t) dt - C_1 - \frac{C_2}{2} = 0,$$

$$h(1) = \int_0^1 \left(\int_0^s A(t) dt \right) ds - \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{6} = 0.$$

Тогда (9) принимает вид

$$\int_0^1 [A(x) - C_1^* - C_2^* x]^2 dx = 0,$$

откуда и следует, что

$$A(x) \equiv C_1^* + C_2^* x.$$

Отсюда вытекает, что равенство (9) принимает вид

$$(C_1 + C_2) h'(1) - C_2 h(1) = 0$$

для любой $h \in E_0$. Выбирая h так, чтобы

$$h'(1) = 0 \text{ и } h(1) = 1,$$

получим, что

$$C_2 = 0.$$

Аналогично взяв такую h , что

$$h'(1) = 1 \text{ и } h(1) = 0$$

найдем

$$C_1 + C_2 = 0.$$

Тогда $C_1 = C_2 = 0$, следовательно,

$$A(x) \equiv 0.$$

На основании леммы, из равенства (7), вытекают тождество

$$pu_0''(x) + \alpha^{(-1)}(x) - F^{(-1)}(x) \equiv 0$$

и условия

$$\alpha(1) - F(1) = 0, \quad (10)$$

$$-\alpha^{(-1)}(1) + F^{(-1)}(1) = 0. \quad (11)$$

Отсюда, с учетом равенств (4), (5) и (6),

$$pu_0''(x) \equiv - \int_0^x \alpha(s) ds + \int_0^x F(s) ds. \quad (12)$$

Из (12), с учетом (11), вытекает условие

$$pu_0''(x)(1) = 0. \quad (13)$$

Из определения функций $\alpha^{(-1)}(x)$ и $F^{(-1)}(x)$ вытекает их абсолютная непрерывность на $[0; 1]$.

Тогда тождество (12) можно продифференцировать по x :

$$(pu_0'')'(x) \equiv - \int_0^x u(s) dQ(s) + F(x). \quad (14)$$

Последнее равенство вместе с (10) дает условие

$$(pu_0'')'(1) = 0. \quad (15)$$

Таким образом, нами доказана теорема.

Теорема 1. Пусть $p, F \in BV[0; 1]$, причем $\inf_{[0;1]} p > 0$ и $Q(x)$ не убывает на $[0;1]$. Тогда реальная деформация $u_0(x)$ консоли является решением задачи

$$\begin{cases} (pu'')'(x) + \int_0^x u(s)dQ(s) = F(x) + \text{const} \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = 0, \\ u''(1) = 0, \\ (pu'')'(1) = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Задачу (16) будем называть *краевой задачей* для интегро-дифференциального уравнения (14).

Решение уравнения (14) будем искать в пространстве

$$M = \{u'' \in AV[0;1], \quad u''' \in BV[0;1]\}$$

с нормой

$$\|u\| = |u(0)| + |u'(0)| + |u''(0)| + |u'''(0)| + V_0^1(u'''), \quad (17)$$

где $V_0^1(\varphi)$ – полная вариация φ на $[0; 1]$.

Покажем полноту M по норме (17). Пусть $\{u_n(x)\}$ фундаментальна по норме (17). Последовательность

$$v_n(x) = u_n'''(x) \in BV[0; 1]$$

является фундаментальной по норме

$$\|v\|_{BV} = |v(0)| + V_0^1(v)$$

пространства $BV[0; 1]$, следовательно, сходится по норме пространства $BV[0; 1]$ к некоторой функции $v_0(x)$. Числовые последовательности $\{u_n(0)\}$, $\{u_n'(0)\}$ и $\{u_n''(0)\}$ также фундаментальны, поэтому сходятся. Обозначим их пределы через a , b и c соответственно. Введем функцию

$$u_0(x) = \int_0^x ds \int_0^s dt \int_0^t v_0(\tau) d\tau + a + bx + c \frac{x^2}{2}.$$

Покажем, что предел $\{u_n(x)\}$ по норме $\|\cdot\|$ и есть $u_0(x)$. Для этого достаточно рассмотреть норму разности

$$\|u_n - u\| = |u_n(0) - a| + |u_n'(0) - b| + |u_n''(0) - c| + |u_n'''(0) - v_0(0)| + V_0^1(u_n''' - v_0)$$

и воспользоваться тем, что

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(0),$$

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n'(0),$$

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n''(0)$$

и

$$\|u_n''' - v_0\|_{BV} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$, чтобы получить

$$\|u_n - u\| \rightarrow 0.$$

Определение 1. Краевая задача (16) называется *невырожденной*, если однородная краевая задача ($F(x) = \text{const}$) имеет только тривиальное решение.

Теорема 2. Краевая задача (16) невырождена.

Доказательство. Умножим обе части тождества

$$(pu'')'(x) \equiv -\int_0^x u(s)dQ(s) + const \quad (18)$$

на $u'(x)$ и проинтегрируем от 0 до 1:

$$\int_0^1 (pu'')'u'dx = -\int_0^1 u'(t) \left(\int_0^t u(s)dQ(s) \right) dt + const. \int_0^1 u'(s)ds. \quad (19)$$

Проинтегрируем по частям интеграл в левой части и интеграл в правой части:

$$\int_0^1 (pu'')'u'dx = \int_0^1 u'd(pu'') = u'pu''|_0^1 - \int_0^1 pu''du' = -\int_0^1 pu''^2 dx$$

(внеинтегральные слагаемые равны нулю, так как $u'(0) = pu''(1) = 0$) и

$$\begin{aligned} \int_0^1 u'(t) \left(\int_0^t u(s)dQ(s) \right) dt &= \int_0^1 \left(\int_0^t u(s)dQ(s) \right) du(t) = \\ &= \int_0^t u(s)dQ(s) \cdot u(t)|_0^1 - \int_0^1 u(t)d \left(\int_0^t u(s)dQ(s) \right) = u(1) \int_0^1 u(s)dQ(s) - \int_0^1 u^2(t)dQ(t) \end{aligned}$$

(так как $u(0)=0$). Из тождества (18) следует равенство

$$(pu'')'(1) = -\int_0^1 u(s)dQ(s) + const$$

или в силу равенства $(pu'')'(1) = 0$

$$\int_0^1 u(s)dQ(s) + const.$$

Тогда (19) можно записать в виде

$$\int_0^1 pu''^2 dx + \int_0^1 u^2 dQ = 0.$$

Из последнего равенства вытекает, что

$$pu''^2(x) \equiv 0,$$

следовательно,

$$u''(x) \equiv 0.$$

Тогда

$$u'(x) \equiv const,$$

что вместе с условием $u'(0)=0$ приводит к тождеству

$$u'(x) \equiv 0.$$

Отсюда следует, что

$$u(x) \equiv const,$$

а так как $u(0)=0$, то и $u(x)=0$.

Из доказанной теоремы вытекает, что задача (16) однозначно разрешима для любой функции $F(x) \in BV[0; 1]$.

Найдя вторую производную ($\varphi''(0)$) функции $\varphi(\lambda)$:

$$\varphi''(0) = \int_0^1 ph''^2 dx + \int_0^1 h^2 dQ,$$

делаем вывод, что

$$\varphi''(0) > 0,$$

если $h \neq 0$, т. е. $u_0(x)$ дает минимум функционалу $\Phi(x)$.