

Мочалов Дмитрий Валерьевич

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СЕРВИСА ИНТЕГРАЦИИ ПРОГРАММНЫХ КОМПОНЕНТ СИСТЕМЫ ПОДДЕРЖКИ ЭКСПЛУАТАЦИИ И БИЗНЕСА ОПЕРАТОРА СВЯЗИ OSS|BSS

Формализована задача разработки сервиса интеграции программных компонент распределенной системы OSS|BSS оператора связи. Модель системы интеграции представлена в виде многофазной системы массового обслуживания. Получены зависимости периода занятости системы, времени ожидания и пребывания требований в системе от ее загрузки.

Ключевые слова: система интеграции, программные компоненты, модель интеграции, сервис интеграции, система OSS|BSS, преобразование Лапласа-Стилтьеса.

Mochalov Dmitriy Valerevich

ANALYTICAL MODEL OF SERVICE OF INTEGRATION OF PROGRAM COMPONENTS OPERATIONS SUPPORT SYSTEM AND BUSINESS OF THE TELECOM OPERATOR OF OSS|BSS

Formalized the task of developing the service integration of software components of a distributed system OSS|BSS communications operator model of integration is presented in the form of a multiphase queuing system, the dependences of the busy period of system, waiting time and residence requirements of the system on its boot.

Key words: system integration, software components, the model integration, service integration, system OSS|BSS, conversion Laplace-Stieltjes.

Организационно-функциональная структура сервиса интеграции программных компонент системы OSS|BSS приведена на рис. 1.

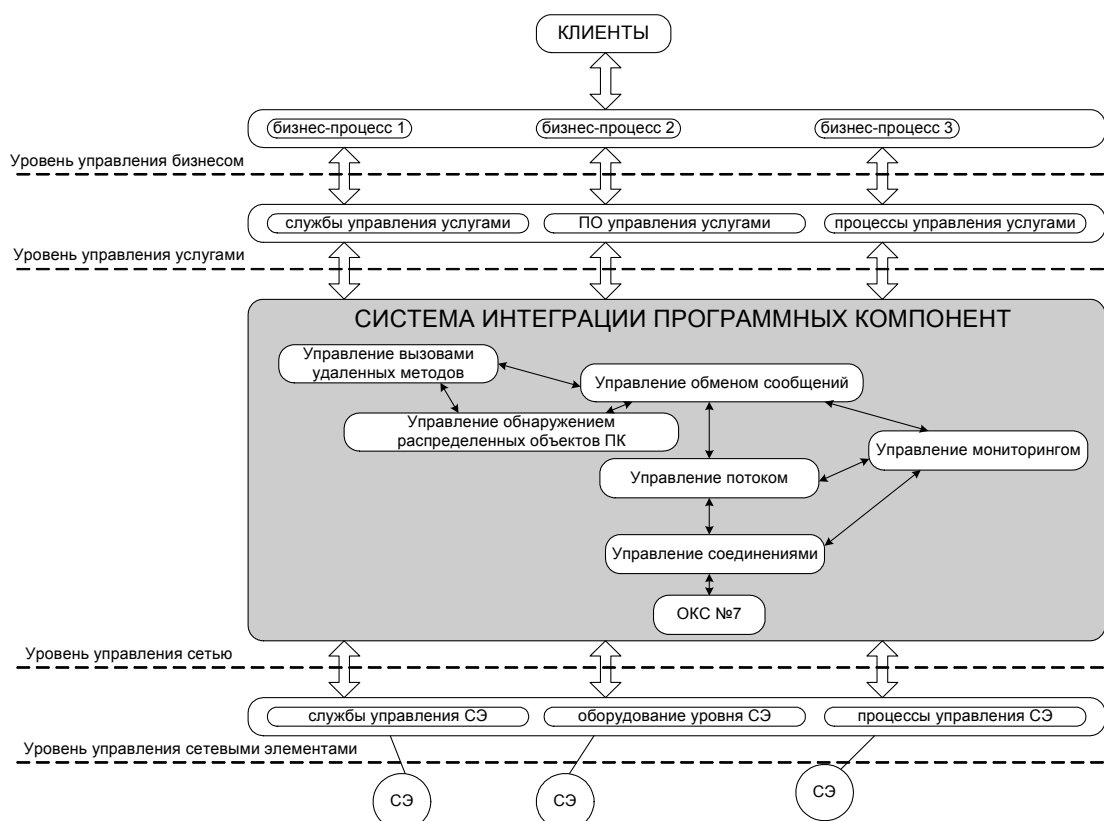


Рис. 1. Система интеграции программных компонент

На сервис интеграции от m центра управления (ЦУ) поступают запросы с интенсивностью λ . Обработка запроса на сервисе осуществляется в четыре этапа: отбор запросов, относящихся к одному и тому же процессорному модулю (ПМ); обработка запросов путём их разбиения с выбором полей параметров; получение объектной ссылки взаимодействия и маркировка значений полей параметров; создание объединённого запроса, полученного после предварительной обработки.

Процесс интеграции программных компонент (ПК), представленный на рис. 2, можно рассматривать как многофазную систему массового обслуживания (СМО), где поток запросов ПК является пуассоновским, а времена создания единого объединённого запроса и формирование единого вызова подчинены произвольному закону распределения, то есть СМО типа $M/G/m$.

Необходимо найти время пребывания в очереди, длину очереди и вероятность отказа в случае совместного обращения m ЦУ к сервису.

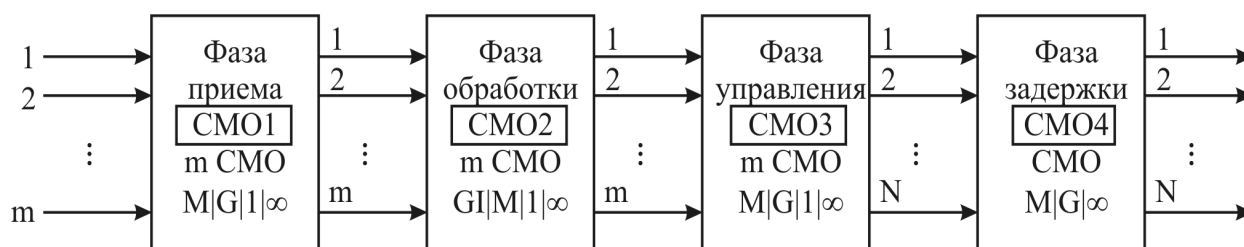


Рис. 2. Модель системы интеграции программных компонент

Опишем СМО, представленную на рис. 2. Данная СМО представлена четырьмя фазами:

первая фаза. Источники имитируют передачу запросов ПК от m ЦУ в среду взаимодействия;

вторая фаза. Запросы поступают на сервис интеграции и становятся в очередь для дальнейшего обслуживания. Если очередь занята, то запрос удаляется, а на источник, откуда этот запрос поступил, отправляется сообщение о повторном запросе через время обслуживания первого в очереди запроса;

третья фаза. Управление запросом, получение объектной ссылки взаимодействия и маркировка значений полей параметров;

четвёртая фаза. Обработка запроса $Z_{ПК[M]}$.

Фазу приема запросов представим СМО типа $M | G | 1 | \infty$.

Основными СВ, характеризующими эту систему, являются:

- период занятости P ;
- время ожидания обслуживания W_n ;
- время пребывания V_n .

Обозначим через $\Pi(t) = P\{\Pi < t\}$, а через $\pi(q)$ ее ПЛС. $B(t) = P\{\xi < t\}$, $\beta(q)$ – ПЛС $B(t)$. ФР $W_n(t)$ представим в виде

$$W_n(t) = 1 - P\{W_n \geq t\}, \text{ где } P\{W_n \geq t\} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k P\{W_n \geq t/\eta' = K\};$$

– условная вероятность выполнения неравенства $W_n \geq t$ для пребывающего требования при условии, что в момент его поступления в системе находилась K других требований.

Очевидно, время пребывания требования V в стационарном режиме равно $V = W + \xi$, где ξ – время обслуживания требования. ФР $V_n(t)$ СВ V можно определить следующим образом: $V_n(t) = P\{V_n < t\}$.

ПЛС СВ W_n и V_n равны $\omega_n(q) = \int_0^{\infty} e^{-qt} dW_n(t)$, $\vartheta_n(q) = \int_0^{\infty} e^{-qt} dV_n(t)$.

Обозначим через $\beta(q)$ ПЛС времени обслуживания СВ ξ . Тогда $\vartheta_n(q) = \omega_n(q)\beta(q)$.

Для данной системы вероятность того, что в момент времени окончания обслуживания в ней находится j других требований равна [1]:

$$B_j = \int_0^{\infty} \frac{(at)^j}{j!} e^{-at} dV(t).$$

Отсюда следует, что производящая функция стационарного числа требований

$$R(z) \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j = \int_0^{\infty} e^{-at} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(atz)^j}{j!} e^{-at} dV(t) = \\ = \int_0^{\infty} e^{-(a-az)t} dV(t) = \mathcal{G}(a-az) = w(a-az)\beta(a-az).$$

Воспользовавшись формулой Поллачека-Хинчина $R(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)\beta(a-az)}{\beta(a-az)-z}$, получаем

$$w(a-az) = \frac{(1-\rho)(1-z)}{\beta(a-az)-z}, \text{ учитывая, что } q = a-az \text{ имеем:}$$

$$w(q) = \frac{(1-\rho)q}{q-a+a\beta(q)}.$$

Данное выражение дает возможность вычислить два первых момента стационарного времени ожидания и пребывания требований в системе

$$w_1 = w'(0) = \frac{a\beta_2}{2(1-\rho)}; \quad w_2 = w''(0) = \frac{a\beta_3}{3(1-\rho)} + \frac{(a\beta_2)^2}{2(1-\rho)^2};$$

$$\mathcal{G}_1 = w_1 + \beta_1;$$

$$\mathcal{G}_2 = w_2 + \beta_2 + 2w_1\beta_1,$$

где $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ – соответственно первый, второй, третий моменты времени обслуживания.

Функциональное уравнение для ПЛС периода занятости СМО $\pi(q) = \beta(q+a-a\pi(q))$, где a – параметр входного потока, $\beta(q)$ – ПЛС времени обслуживания, $\beta(q) = a/(\mu+q)$, $a(\pi(q))^2 - (q+a+\mu)\beta(q) + \mu = 0$, откуда следует, что

$$\pi(q) = \frac{q+a+\mu - \sqrt{(q+a+\mu)^2 - 4a\mu}}{2a}.$$

Первые два момента периода занятости определяются следующим образом:

$$\pi_1 = \pi'(0) = (\mu-a)^{-1}, \quad \pi_2 = \pi''(0) = 2\mu(\mu-a)^{-3}.$$

Используя таблицы преобразований Лапласа, получаем

$$\frac{d\Pi(t)}{dt} = \frac{1}{t\sqrt{\rho}} I_1(2\mu t\sqrt{\rho}) e^{-(1-\rho)\mu t}, \quad \rho = a/\mu,$$

где $I_1(t)$ – функция Бесселя первого рода.

Для анализируемой системы справедливы формулы Литтла

$$L = \lambda \mathcal{G}_1, \quad N = \lambda w_1, \quad M = \lambda \beta_1,$$

где L, N, M – соответственно математическое ожидание числа требований в системе, числа требований ожидающих обслуживания, стационарного числа занятых ОП.

Фазу обработки запросов представим как СМО $M | D | 1 | \infty$.

Для данной СМО имеем $\xi = t_0 = \text{const}$, поэтому

$$\beta(q) = \int_0^{\infty} e^{qt} \delta(t-t_0) dt = e^{-qt_0}; \quad \rho = at_0.$$

ПФ числа требований в СМО в стационарном режиме, как следует из формулы Поллачека-Хинчина, имеет вид: $P(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)}{1-ze^{\rho(1-z)}}$, откуда с помощью дифференцирования функции $P(z)$ в точке $z = 0$, используя свойства ПФ, получаем

$$p_0 = 1 - \rho; \quad p_1 = (1 - \rho)(e^\rho - 1);$$

$$p_k = (1 - \rho) \left\{ e^{kp} + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{k-j} e^{jp} \left[\frac{(j\rho)^{k-j}}{(k-j)!} + \frac{(j\rho)^{k-j-1}}{(k-j-1)!} \right] \right\}, \quad k \geq 2.$$

Из данных соотношения следует, что

$$w(q) = \frac{(1 - \rho)q}{q - a + ae^{-q t_0}}.$$

Обращая преобразование Лапласа $w(q)/q$ (например, с помощью таблиц), приходим к выводу, что ФР стационарного времени ожидания в этом случае имеет вид:

$$w(t) = (1 - \rho) e^{at} \sum_{j=0}^n e^{-jp} \frac{[a(jt_0 - t)]^j}{j!},$$

где $n = [t/t_0]$, или выполняется неравенство $nt_0 \leq t \leq (n+1)t_0$,

$$w_1 = \frac{\rho t_0}{2(1 - \rho)}; \quad w_2 = \frac{\rho t_0^2 (2 + \rho)}{6(1 - \rho)}.$$

ФР $V(t)$ стационарного времени пребывания имеет вид:

$$V(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leq t_0; \\ W(t - t_0), & \text{если } t > t_0. \end{cases}$$

Для данной фазы СМО $M | D | 1 | \infty$ имеем $\rho = at_0$, где $t_0 = \text{const}$ – время обслуживания, а ПЛС времени обслуживания соответственно $\beta(q) = e^{-q t_0}$.

Из [1] следует, что вероятность обслуживания поступивших требований $N(z) = ze^{-\rho} e^{\rho N(z)}$.

Известно, что математическое ожидание числа событий происходящих в интервале длительности t равно

$$E(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k P_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!} e^{-at} = at.$$

Применяя разложение функции $H(u)$ в ряд Лагранжа, получаем $H(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{k-1}}{k!} u^k$, откуда с

помощью обратной замены получаем $N(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k\rho)^{k-1}}{k!} z^k$.

Для данной СМО очевидно, что если за период занятости было обслужено k требований, то его продолжительность kt_0 .

Поэтому ФР $\Pi(t)$ периода занятости Π системы обработки можно представить в виде

$$\Pi(t) = \sum_{k=1}^n \frac{(k\rho)^{k-1}}{k!} e^{-k\rho},$$

где $n = [t/t_0]$, $\rho = at_0$.

Фазу управления представим совокупностью m СМО типа $M | G | 1 | \infty$. В соответствии с [1] время обслуживания в СМО определяется состоянием сканирующего устройства системы.

Будем считать, что поступившее требование обслуживается мгновенно, если состояние датчика случайных чисел сканирующего устройства принимает значение 1. В противном случае считаем, что время обслуживания распределено экспоненциально с параметром P .

Функция распределения времени обслуживания имеет вид:

$$B(t) = P + (1 - P)(1 - e^{pt}), \text{ а ее ПЛС равно } \beta(q) = P + \frac{(1 - P)P}{P + q} = \frac{P(1 + q)}{P + q}.$$

Первый момент времени обслуживания определяется соотношением

$$\beta_1 = -\beta'(0) = \frac{1 - P}{P}.$$

Следовательно, в этом случае $\rho = a\beta_1 = a(1-P)/P$, ПЛС времени ожидания имеет вид:

$$W(q) = \frac{(1-\rho)(P+q)}{P+q-a(1-P)} = \frac{(1-P)(P+q)}{q+P(1-\rho)}.$$

Первый момент времени ожидания равен: $W_1 = -W'(0) = \frac{P}{P(1-\rho)}.$

Задача восстановления оригинала по известному изображению сводится к необходимости рассмотреть обратное преобразование Лапласа. Известно, что если изображение есть правильная несократимая рациональная дробь $\frac{A_n(P)}{B_n(P)}$, знаменатель имеет корни $P_1, P_2, \dots, P_m$ кратности m так, что

$$r_1 + r_2 + \dots + r_m = m, B_m(P) = \beta_0(P-P_1)^{r_1}(P-P_2)^{r_2} \dots (P-P_n)^{r_m},$$

то оригинал может быть найден по формуле:

$$f(t) = \sum \operatorname{Re} s \left[\frac{A_n(P)e^{Pt}}{B_m(P)} \right].$$

Частный случай для ситуации, когда все корни знаменателя $P_1, P_2, \dots, P_m$ являются простыми, т. е. $r_1 = r_2 = \dots = r_m = 1$, позволяет находить оригинал по формуле $f(t) = \sum \frac{A_n(P_k)}{B_m(P_k)} e^{P_k t}$, тогда обращение преобразования Лапласа функции $W(q)$ будет определяться соотношением $W(t) = \sum \operatorname{Re} s \left[\frac{(1-\rho)(P-q)}{q(q+P(1-\rho))} e^{qt} \right].$

ФР СВ V имеет вид $V(t) = P\{V < t\} = \int_0^t W(t-u)dB(u) = \int_0^t e^{-\mu u} W(t-u) dU$, где $B(t) = 1 - e^{-\mu t}$.

Очевидно, что $P\{W > 0\} = 1 - W(0) = \frac{(n\rho)^n P_0}{n!(1-\rho)}.$

Первый момент стационарного времени ожидания равен

$$W_1 = EW = \int_0^\infty dW(t) = \frac{n^{n-2} \rho^n P_0}{\mu(1-\rho)^2 (n-1)!}.$$

Первый момент стационарного времени пребывания равен

$$V_1 = EV = \int_0^\infty t dV(t) = \beta_1 + T_1 = \frac{1}{\mu} + \frac{n^{n-2} \rho^n P_0}{\mu(1-\rho)^2 (n-1)!}.$$

Фаза задержки моделируется с помощью стационарной СМО $M|G|\infty$. Считаем, что на вход системы поступает простейший поток интенсивностью a , объемы сообщений G распределены по геометрическому закону со средним значением $\varphi_1 = 1/P$, т. е. $P\{G = r\} = P(1-P)^{r-1}$. Моменты i -го порядка φ_i СВ G определяются соотношениями $\varphi_1 = 1/P$, $\varphi_2 = (2-P)/P^2$, $\varphi_3 = [(3-P)^2 - 3]/P^3$. Если соотношение характеризуется случайным объемом G , ФР которого $L(x)$, а $\varphi(s)$ – ПЛС ФР $L(x)$, тогда

$\delta(s) = \sum_{k=0}^\infty P_k (\varphi(s))^k = P(\varphi(s))$, где $P(z)$ – стационарная ПФ числа требований в системе, а вероятности P_k имеют вид:

$$P_0 = 1 - \rho; P_k = \rho(1-k)k^{k-1},$$

$$P(z) = 1 - \rho + \rho(1-k) \sum_{k=1}^\infty k^{k-1} z^k = 1 - \frac{\rho(1-z)}{1-kz}, \delta(s) = 1 - \frac{\rho(1-\varphi(s))}{1-k\varphi(s)}.$$

Если $L(x) = P(1-P)^{r-1}$, то $\delta(s) = \frac{(1-P)s + (1-k)r}{s + r - kr}.$

Из последней формулы получаем соотношения для первых двух моментов суммарного времени задержки требований, находящихся в системе в стационарном режиме:

$$\delta_1 = -\delta(0) = \frac{\rho(2-k)}{r(1-k)}, \quad \delta_2 = \delta''(0) \frac{2\rho}{kr^2} \left[\frac{k^2 + 2(1-k)}{(1-k)^2} - \frac{(1-k)(2-a\mu)}{k(1-a\mu)} \right].$$

Зависимости периода занятости системы, времени ожидания и пребывания требований в системе приведены на рис. 3, 4, 5.

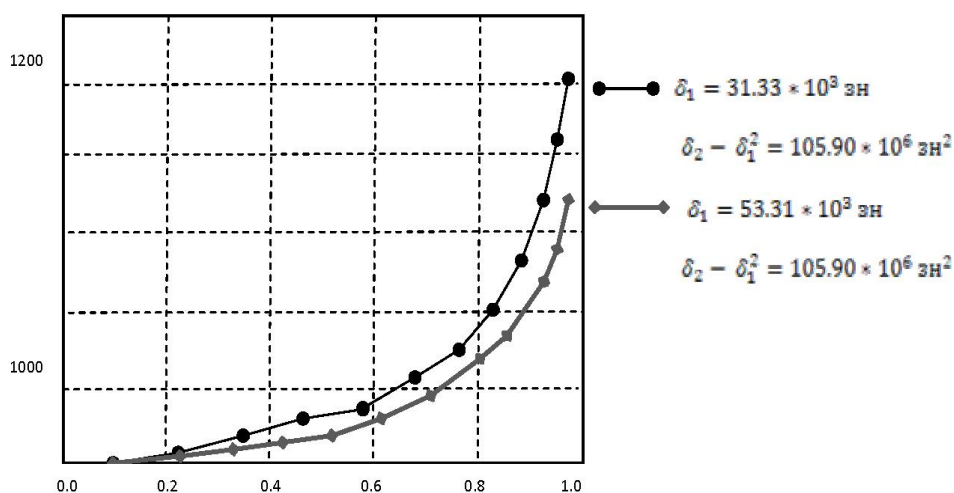


Рис. 3. Зависимость ω_1 от ρ

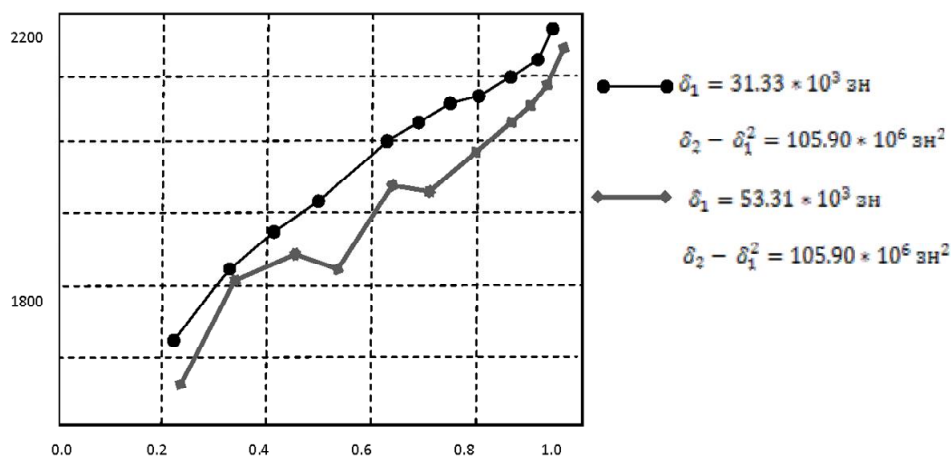


Рис. 4. Зависимость v_1 от ρ

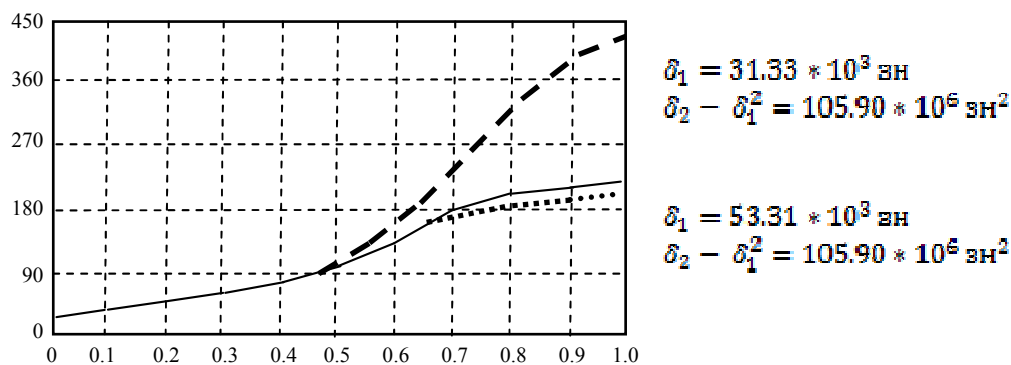


Рис. 5. Зависимость Π от ρ

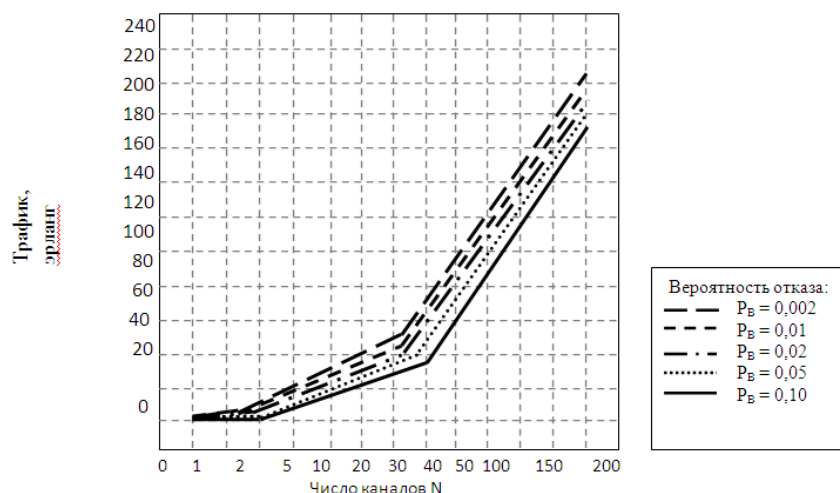


Рис. 6. Зависимость $p_{отк}$ от нагрузки

Литература

1. Тихоненко О. М. Модели массового обслуживания в информационных системах: учебное пособие. Минск: УП «Технопринт», 2003. 327 с.

УДК 517.968.7

Обласова Ирина Николаевна, Ширяева Наталья Васильевна

ОБОСНОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СИНГУЛЯРНО ЗАКРЕПЛЕННОЙ КОНСОЛИ

Рассмотрена математическая модель протяженной одномерной упругой системы типа балки – консоли с нерегулярными взаимодействиями с внешней средой. Построенное интегро-дифференциальное уравнение имеет физическую природу, возникая из задачи минимизации функционала энергии для консоли.

Ключевые слова: сингулярно закрепленная консоль, краевая задача, интегро-дифференциальное уравнение, реальная деформация консоли, функция влияния.

Oblasova Irina, Shiryaeva Natalia

THE JUSTIFICATION OF MATHEMATICAL MODEL FOR SINGULARLY FIXED CONSOLE

The article is dedicated to mathematical model continuous one-dimensional elastic system of beam type- a consoles with irregular interaction with external ambience. Built integro-differential equation has a physical nature, arising from the problem of minimization of the energy functional for the console.

Key words: singularly fixed console, boundary value problem, integro-differential equation, the real deformation of the console function of influence.

Одной из базовых математических моделей инженерной математики и строительной механики является уравнение $(EJu'')''=f$, с которым можно ознакомиться в курсе «Сопротивление материалов». Это уравнение, введенное более 200 лет назад Эйлером и Бернулли, описывает упругие деформации стержня (балки). Это уравнение не зависит от условий закрепления концов, которые в интересующем нас случае (и наиболее сложно в инженерном плане) имеют вид $u(0)=u'(0)=0$ и $u'(l)=u'''(l)=0$.

Первое условие означает, что левый конец наглухо зашпелен, а второе – что правый конец свободен. Функция $f(x)$ определяется внешней нагрузкой.

Стандартные для инженерной практики расчеты проводятся для случаев, когда E – модуль Юнга и $J(x)$ – момент инерции поперечного сечения постоянны. Если при этом и $f(x)=const$, то уравнение $(EJu'')''=f$ решается напрямик по стандартным правилам и заложенным в стандартные пакеты для ПК. На возможности решить такое уравнение явно построены и все основные формулы сопромата.