Исследование двух типов вольтерровских моделей динамики N взаимодействующих популяций выявило зависимость поведения модели от выбора управляющих параметров.

Литература

1. Ризниченко Г. Ю. Математические модели в биофизике и экологии. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. С. 105.

2. Притула Т. К., Адамчук А. С., Амироков С. Р. Об устойчивых состояниях трехвидовой вольтерровской системы // Сборник научных трудов. Пятая международная научно-техническая конференция «Инфокоммуникационные технологии в науке, производстве и образовании». Кисловодск; Ставрополь, 2012. С. 105.

УДК 519.5

Рыскаленко Роман Андреевич, Черкасова Ирина Викторовна

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ В ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ПЕРЕНОСА

Рассматривается нестационарное уравнение переноса примесей в атмосфере и для него выполняется построение итерационного вычислительного алгоритма на основе операторов обобщенного дифференцирования функций, соответствующих эмпирическим данным задачи, представляемых сингулярными интегралами.

Ключевые слова: нестационарное уравнение переноса примесей в атмосфере, итерационный вычислительный алгоритм, сингулярные интегралы, численные исследования.

Riskalenko Roman Andreevich, Cherkasova Irina Viktorovna

INTEGRATED REPRESENTATIONS OF FUNCTIONS IN NUMERICAL METHODS OF THE SOLUTION OF NON-STATIONARY PROBLEMS OF TRANSFER

The non-stationary equation of transfer of impurity in the atmosphere is considered and for it creation of iterative computing algorithm on the basis of operators of the generalized differentiation of the functions corresponding to empirical data of a task, represented in singular integrals is carried out.

Keywords: non-stationary equation transfer of impurity in the atmosphere, iterative computing algorithm, singular integrals, numerical researches.

В настоящей работе рассматривается нестационарное уравнение переноса примесей в атмосфере и для него выполняется построение вычислительного алгоритма на основе операторов обобщенного дифференцирования функций, соответствующих эмпирическим данным задачи, представляемых сингулярными интегралами. Подобные операторы также используются в работе для нахождения приближенных решений исходного дифференциального уравнения. В итоге задача сводится к построению интегрального уравнения Вольтерра второго рода и решается методом последовательных приближений, что приводит к построению соответствующего итерационного алгоритма.

В ранее опубликованных работах авторов [1, 2] разрабатывались численные методы и алгоритмы (итерационные и рекурсивные) для решения нестационарных задач переноса субстанции в природных средах на основе операторов обобщенного дифференцирования в случае использования эмпирических данных. Предлагаемые алгоритмы численного дифференцирования определены вполне корректно на множествах приближенно заданных функций и основаны на их предварительном усреднении (сглаживании) в области определения. Вместе с тем в подобных задачах могут быть использованы и более точные аналитические методы для построения операторов обобщенного дифференцирования в прикладном анализе. В пределах данной работы предлагается метод построения операторов обобщенного дифференцирования исследуемых функций на основе их представления соответствующими сингулярными интегралами. Теория сингулярных интегралов функций была развита А. Лебегом [3, 4] и использовалась при решении задач теории приближения функций [5]. Примерами таких интегралов служат интегралы Дирихле $D_n(x, f)$ в гармоническом анализе, интегралы Пуассона $P_n(x, f)$ в теории гармонических функций и другие. Подобные аппараты приближения (конструирования) функций могут быть весьма эффективными не только в построении обобщенных аппроксимационных полиномов, но и при нахождении приближенных решений дифференциальных уравнений при введении в них приближенных данных (тоже – не дифференцируемых функций). Соответствующие пояснения ниже будут даваться на примере решения полуэмпирического уравнения турбулентной диффузии, связанного с задачей прогноза пространственно-временной изменчивости поля концентрации загрязняющих веществ в пограничном слое атмосферы. Упомянутое уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha(t)u=\frac{\partial}{\partial x}(K(x,t)\frac{\partial u}{\partial x})-\frac{\partial}{\partial x}(V(x,t)u)+S(x,t), \qquad (1)$$

в котором функции $V(x,t)$ и $K(x,t)$ характеризуют состояние реальной среды и задаются приближенно в пределах погрешности σ. В соответствии с этим для приближенных данных в задаче (1) будем использовать обозначение $B_\sigma=\{(V_\sigma(x,t),K_\sigma(x,t)\}$. Напомним, что функция $V(x,t)$ определяет поле скорости ветра в пределах области $\Omega=\Omega_x\times\Omega_t=[a,b]\times[t_0,T]$, $K(x,t)$ – поле коэффициента турбулентной диффузии, и $u(x,t)$ – поле концентрации контролируемых загрязнений. Функциональное уравнение (1), связывающее $V(x,t)$ и $K(x,t)$ с искомой функцией $u(x,t)$, определено в полной мере в соответствии с теоремами существования решений уравнений параболического типа, если функции $V(x,t)$ и $K(x,t)$ дифференцируемы в каждой точке $(x,t)\in\Omega$. В соответствии с последним можно писать $V,K\in C_1(\Omega)$. В этом случае альтернативой множеству B_σ служит множество $B_0=\{(V_0(x,t),K_0(x,t),\}\subset C_1(\Omega)$. Что же касается аналитических свойств $V_\sigma(x,t)$ и $K_\sigma(x,t)$, то далее делаем предположение, что они в лучшем случае интегрируемые функции и значит, $B_\sigma\subset C_{\sum}(\Omega)$. Без ограничения общности считаем $B_\sigma\subset L_1(\Omega)$. С учетом сделанных замечаний функциональную модель (1) следует заменить новой моделью, которая бы была определенной на множестве данных B_σ. Последнее достигается заменой оператора обычного дифференцирования $D_x=\frac{\partial}{\partial x}$ так называемым «обобщенным» аналогом $\widetilde{D}_x$, который распространяется на функции из класса $C_{\sum}(\Omega)$. Прежде чем показать как это можно сделать на примере (1), запишем это уравнение в операторной форме, а именно

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\alpha(t)u=-(D_xJ)(x,t,u)+S(x,t), \qquad (2)$$

где

$$J(x,t,u)=V(x,t)u-K(x,t)(D_xu)(x,t)=((V(x,t)I-K(x,t)D_x)u)(x,t)=(Qu)(x,t). \qquad (3)$$

Теперь обратимся к аппарату представления суммируемых функций $f(x)\in C_{\sum}(\Omega)$ их сингулярными интегралами, о которых упоминалось выше в вводной части работы. В соответствии с теоремами Лебега о сингулярных интегралах функций [3], существует также последовательность ядер $\{K_n(x,x')\}$ $(n=1,\ 2...)$ интегральных операторов K_n, определенных на $C_{\sum}(\Omega_x)$, что для всякой функции $f(x)\in C_{\sum}(\Omega_x)$ имеют место соотношения:

$$\begin{cases}\int\limits_a^b K_n(x,x')f(x')dx'=(K_nf)(x)=f_n(x)\\ \lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\end{cases} \qquad (4)$$

в каждой точке $x\in\Omega_x$.

Выражение (4) следует считать определением понятия «сингулярный интеграл» функции $f(x)$ в точке $x\in\Omega_x$. Важно подчеркнуть в излагаемой здесь теории, что если ядро $\{K_n(x,x')\}$ интегрального преобразования $K_n:f\to f_n$ непрерывно и ограничено в области $\Omega_x\times\Omega_x$, то функции в последовательности $\{f_n(x)\}$ непрерывны, в то время как исходная функция $f(x)$ всего лишь интегрируема на Ω_x. Таким образом, предельный элемент последовательности $\{f_n(x)\}$ может и не принадлежать классу $C(\Omega_x)$. Последнее замечание очень важно в понимании содержательного смысла предлагаемого подхода и его возможностей в прикладном анализе.

Полагаем далее, что исследуемая функция $f(x)$ имеет в точке x производную $f'(x)$, которая как минимум интегрируема на отрезке $\Omega_x = [a,b]$. В этой ситуации по аналогии с (4) пишем

$$\begin{cases} \int\limits_a^b K_n(x,x')f'(x')dx' = (K_n f')(x) = (f')_n(x) \\ \lim\limits_{n\to\infty}(f')_n(x) = f'(x) = (Df)(x). \end{cases} \tag{5}$$

Все, что говорилось выше о свойствах последовательности $\{f_n(x)\}$, в полной мере касается последовательности $\{(f')_n(x)\}$ и ее отношению к $f'(x)$ в точке $x \in \Omega_x$. Если теперь допустить, что ядро $K_n(x,x')$ дифференцируемо по указанным переменным, то применяя формулу интегрирования по частям к интегралу (5), получим выражение:

$$\int\limits_a^b K'_{n,x}(x,x')f(x')dx + \psi_n(x,\bar{f}) = (f')_n(x), \tag{6}$$

где введено обозначение $\psi_n(x,\bar{f}) = K_n(x,x')f(x')\Big|_{x'=a}^{x'=b}$. При выводе (6) использованы условия $K'_{n,x}(x,x') = -K'_{n,x'}(x,x')$, которые являются, в свою очередь, следствием соотношений $K_n(x,x') = K_n(x-x')$ и $K_n(x-x') \to 0$ при $|x-x'| \to \infty$ для всех n. Для упрощения выражений далее полагаем, что $f(a) = f(b) = 0$ и поэтому $\psi_n(x,\bar{f}) \equiv 0$ для $\forall x \in [a,b]$. Поскольку в соответствии с (5) последовательность $\{(f')_n(x)\}$ сходится к $f'(x)$, то с учетом (6) можно утверждать, что интегральный оператор $(D_x K_n)$ с ядром $K'_{n,x}(x,x')$ осуществляет преобразование $f \to (Df)$ для каждой пары (n,x) по мере увеличения n. Это преобразование можно принять в качестве оператора обобщенного дифференцирования $f(x)$, определенной на Ω_x. В дальнейшем для него будем использовать обозначение $(D_x K_n) = \widetilde{D}_{x,n}$, ассоциируя его с парой переменных (n,x). Для функции $f(x)$, имеющих производную $f'(x)$ в каждой точке $x \in \Omega_x$, последовательность операторов $\widetilde{D}_{x,n}$ имеет предельным элементом оператор $D_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$ обычного дифференцирования. Ясно, что сходимость в данном случае понимается в слабом смысле, поскольку именно этот тип сходимости присущ предельным соотношениям в (4) и (5). Если $f(x)$ не является дифференцируемой в точке $x \in \Omega_x$, то значение функционала $(\widetilde{D}_{x,n} f)(x)$ следует понимать как меру изменчивости (гладкости) $f(x)$ в окрестности точки x.

Располагая оператором $\widetilde{D}_{x,n}$ как обобщенным аналогом оператора D_x, обратимся к уравнению (2). Оставляя в стороне вопрос о надлежащем выборе последовательности $\{K_n(x,x')\}$ для оператора $\widetilde{D}_{x,n}$, с учетом особенностей решаемой задачи (это вопрос специального исследования), в качестве примера рассмотрим последовательность функций:

$$W_n(x,x') = \frac{n}{\sqrt{\pi}\,d} e^{-n^2\left(\frac{x-x'}{d}\right)^2}, \tag{7}$$

где d – некий произвольный параметр $d > 0$ и $(x,x') \in (-\infty,+\infty)$. В теории сингулярных интегралов функций подобное ядро называется ядром Вейерштрасса (Гаусса). Основные свойства этого ядра характеризуются следующими соотношениями:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} W_n(x,x')dx' = 1, \tag{8}$$

$$W'_{n,x}(x,x') = -W'_{n,x'}(x,x'), \quad W_n(x,x') > 0,$$

$$W_n(x,x') = W_n(x-x') \to 0 \ \text{ при } |x-x'| \to \infty.$$

Для приложений, связанных с приближенными вычислениями либо приближенным характером функциональных уравнений, удобно ввести параметр $\tau = \dfrac{d}{n}$ $(0 < \tau < 1)$, что позволяет параметризовать задачу и представить (7) в виде:

$$W_\tau(x, x') = \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} e^{-\left(\frac{x-x'}{\tau}\right)^2}. \tag{9}$$

В соответствии с этим оператор обобщенного дифференцирования по координате x будем обозначать через $\widetilde{D}_{x,\tau} = (D_x W_\tau)$. Напомним, что $\widetilde{D}_{x,\tau}$ является интегральным оператором и формально определяется выражением:

$$((D_x W_\tau) f)(x) = \int_{\Omega_x} (D_x W_\tau)(x, x') f(x') dx', \tag{10}$$

где $f \in C_{\sum}(\Omega_x)$. В вычислительных задачах оператор $\widetilde{D}_{x,\tau}$ реализуется на основе квадратур для каждой пары (x, τ), где $x \in [a, b]$ и $\tau \in (0, 1)$.

Заменяя в (3) оператор D_x на $\widetilde{D}_{x,\tau}$, приходим к новому обобщенному оператору задачи, а именно

$$\widetilde{Q}_\tau = \widetilde{D}^\circ{}_{x,\tau}[V(x,t)I - K(x,t)\widetilde{D}_{x,\tau}], \tag{11}$$

который теперь по построению вполне определен на множестве возможных решений $U(\Omega)$ на множестве исходных данных B_σ. В итоге исходное уравнение (2) записывается следующим образом:

$$\dot{u} + \alpha(t)u = -(\widetilde{Q}_\tau u)(x,t) + S(x,t), \tag{12}$$

где $\widetilde{Q}_\tau$ – линейный ограниченный оператор при $(0 < \tau < 1)$. Если считать, что $u_0(x,t) \in U(\Omega)$ и является единственным (точным) решением уравнения (1), то теперь необходимы определенные гарантии того, что величина $\|u_\tau(x,t) - u_0(x,\tau)\|_{L_1(\Omega)}$ будет сколь-угодно малой при малых значениях параметров τ, σ. Доказательство справедливости подобного утверждения естественно основано на предельном отношении $\widetilde{D}_{x,\tau} \to D_x$ при $\tau \to 0^+$ с одной стороны, и факта существования сходящейся последовательности $\{u_\tau(x,t)\}$ решений уравнения (12), с другой стороны. Дадим краткие пояснения, касающиеся возможности построения решающего алгоритма для интегро-дифференциального уравнения (12), считая оператор $\widetilde{Q}_\tau$ вполне непрерывным и ограниченным в классе $L_1(\Omega)$. Исходя из этого предположения, для решения $u(x,t)$ уравнения (12) можно записать следующее интегральное представление:

$$u(x,t) = -\int_{t_0}^{t} K(t,t')(\widetilde{Q}_\tau u)(x,t')dt' + \overline{S}(x,t), \tag{13}$$

где

$$K(t,t') = \exp\left\{-\int_{t'}^{t} \alpha(t'')dt''\right\},$$

$$\overline{S}(x,t) = \int_{t_0}^{t} K(t,t')S(x,t')dt' + u(t_0, x)\exp\left\{-\int_{t_0}^{t} \alpha(t')dt'\right\}.$$

Выражение (13) представляет собой интегральное уравнение Вольтера второго рода и, как известно, решается методом последовательных приближений по следующей итерационной схеме:

$$u^{(\nu)}(x,t) = -\int_{t_0}^{t} K(t,t')(\tilde{Q}_\tau u^{(\nu-1)})(x,t')dt' + \overline{S}(x,t), \nu = 1,\ 2\ldots, \tag{14}$$

начиная с $u^{(0)}(x,t)=\overline{S}(x,t)$. Сходимость последовательности приближенных решений $\{u^{(\nu)}(x,t)\}$ требует выполнения следующих условий [1, 2]:

$$\left\|\Delta^{(\nu,\nu-1)}u\right\|_{L_1(\Omega)} \le \frac{1}{\nu!}\left[\left\|\widetilde{Q}_\tau\right\|_{L_1(\Omega)} \cdot \left\|\Delta^{(1,0)}u\right\|_{L_1(\Omega)}\right]^\nu, \tag{15}$$

где обозначено $(\Delta^{(\nu,\nu-1)}u)(x,t)=u^{(\nu)}(x,t)-u^{(\nu-1)}(x,t)$.

Ясно, что если существуют такие положительные числа A_1, A_2 $(A_1, A_2<\infty)$, что $\left\|\widetilde{Q}_\tau\right\|_{L_1(\Omega)} \le A_1$ и $\left\|\Delta^{(1,0)}u\right\|_{L_1(\Omega)} \le A_2$ для выбранных значений исходных данных в задаче, то условие (15) выполняется при $\nu\to\infty$. Таким образом, итерационный процесс (14) сходится и остается надлежащим образом выбрать значение параметра τ с учетом погрешности и ее характера в исходных данных B_σ. Подобные задачи решаются методом предварительного вычислительного эксперимента [1, 2, 6].

Представление о влиянии значений параметра τ на норму оператора $\widetilde{Q}_\tau$ можно получить, исходя из соответствующей зависимости нормы оператора обобщенного дифференцирования $\widetilde{D}_{x,\tau}$. Имеет место следующая оценка:

$$\left\|\widetilde{D}_{x,\tau}\right\|_{C(\Omega_x)} \le \frac{2}{\sqrt{\pi\tau}} \quad (\tau>0), \tag{16}$$

при $\Omega_x=(-\infty,+\infty)$ и ядре (9).

Оценка (16) явно напоминает о наличии особенностей в ядре $(D_x K_\tau)(x,x')$ интегрального оператора $\widetilde{D}_{x,\tau}$. Эти особенности лежат в окрестности диагонали ядра $x=x'$ и при вычислении интегралов обходятся отбрасыванием соответствующей области, как это делается в теории потенциалов. Речь идет о введении области интегрирования $\Omega_{x,\mu}=\{x'\in\Omega_x \,\|x-x'|\ge\mu\}$, где $\mu>0$ достаточно малое число. В контексте рассматриваемой задачи можно внести ограничение типа:

$$\min_{(x,x')\in\Omega_x\times\Omega_x}|x-x'|\ge\mu(\sigma), \tag{17}$$

где $\mu(\sigma)\to 0$ при $\sigma\to 0$. В связи с этим практический интерес представляет неравенство $I\min\ge\mu(\sigma)$. Возможны и иные соотношения качественного характера между параметрами тех вычислительных моделей для задачи (1), которые могут быть предложены в рамках изложенной теории.

Литература

1. Наац В. И., Наац И. Э. Математические модели и численные методы в задачах экологического мониторинга атмосферы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 328 с.
2. Наац В. И. Определение производных эмпирических функций методом интегральных уравнений в задачах переноса // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. № 5. Приложение. Ростов-н/Д., 2005. С. 14–22.
3. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы: спектральная теория. М.: Мир, 1966. 1063 с.
4. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы: общая теория. М.: Изд-во иностранной литературы, 1962. 1063 с.
5. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1949. 683 с.
6. Каргин Н. И., Наац В. И. Итерационные методы численного решения задач переноса на основе интегральных уравнений // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. Приложение. 3'04. Ростов-н/Д. 2004. С. 3–16.
7. Каргин Н. И., Рыскаленко Р. А. Многочлены Бернштейна и метод наименьших квадратов в вычислительной модели уравнения Навье – Стокса // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. № 6. Приложение. Ростов-н/Д., 2007. С. 3–11.