метров β, γ, α осуществляется с учетом эффективности итерационных схем (15) на множестве исходных данных B_σ. Построение и исследование изложенного выше итерационного алгоритма для нестационарного уравнения переноса ранее осуществлялось в работах авторов [1, 5].

Литература

1. Наац В. И., Наац И. Э. Математические модели и численные методы в задачах экологического мониторинга атмосферы. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2010. 328 с.
2. Наац В. И., Наац И. Э. Модели переноса аэрозолей в атмосфере на основе априорных оценок значений коэффициента турбулентной диффузии, определяемых по дифференциальным характеристикам поля скорости ветра // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. № 1. Ростов-н/Д., 2008. С. 38–41.
3. Наац В. И. Определение производных эмпирических функций методом интегральных уравнений в задачах переноса // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. № 5. Приложение. Ростов-н/Д., 2005. С. 14–22.
4. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М., 1979.
5. Наац В. И., Каргин Н. И. Итерационные методы численного решения задач переноса на основе интегральных уравнений // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. № 3. Приложение. Ростов-н/Д., 2004. С. 3–16.

УДК 575.3/7

Притула Татьяна Константиновна, Адамчук Анна Станиславовна

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВЫХ СОСТОЯНИЙ МОДЕЛЕЙ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СООБЩЕСТВ

Приведены результаты исследования устойчивости на примере некоторых частных случаев модели Лотки – Вольтерра взаимодействия двух видов с разными управляющими коэффициентами, а также модели репродукции ДНК для N видов.

Ключевые слова: устойчивость, дифференциальные уравнения, модель, параметр, популяция.

Pritula Tatyana Konstantinovna, Adamchuk Anna Stanislavovna

RESEARCH OF STEADY CONDITIONS OF MODELS OF INTERACTION OF COMMUNITIES

Results of research of stability are given in article on the example of some special cases of model of Lotki – Volterra of interaction of two views with different managing directors in coefficients, and also model of a reproduction of DNA for N types.

Key words: stability, differential equations, model, parameter, population.

Общий вид вольтерровских моделей динамики *n* взаимодействующих популяций таков:

$$\frac{dU_i}{dt} = U_i\left(a_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}U_j\right), \tag{1}$$

где a_i – скорость естественного прироста (смертности) *i*-го вида в отсутствие остальных; a_{ij} – влияние *j*-го вида на *i*-й вид.

В данной статье проводится исследование устойчивости на примере некоторых частных случаев модели (1).

Рассмотрим вольтерровскую модель взаимодействия 2-х разных популяций, т. е. систему из 2-х уравнений:

$$\frac{dU_1}{dt} = a_1U_1 + a_{12}U_1U_2 + a_{11} * U_1^{\,2}, \tag{2}$$
$$\frac{dU_2}{dt} = a_2U_2 + a_{21}U_1U_2 + a_{22} * U_2^{\,2}.$$

В зависимости от выбора коэффициентов a_i, a_{ij} модель (2) может принадлежать одному из следующих типов: симбиоз ($a_{12}, a_{21} > 0$), комменсализм ($a_{12} > 0, a_{21} = 0$), хищник-жертва ($a_{12} > 0, a_{21} < 0$), аменсализм ($a_{12} = 0, a_{21} < 0$), конкуренция ($a_{12}, a_{21} < 0$), нейтрализм ($a_{12}, a_{21} = 0$) [1]. Перепишем систему (2) в виде:

$$\frac{dU_1}{dt} = U_1(a_1 + a_{12}U_2 + a_{11} * U_1), \qquad (3)$$

$$\frac{dU_2}{dt} = U_2(a_2 + a_{21}U_1 + a_{22} * U_2).$$

Эта система имеет 4 стационарных точки:

1. $U_1 = U_2 = 0$.
2. $U_1 = -\frac{a_1}{a_{11}}, \ U_2 = 0$.
3. $U_1 = 0, \ U_2 = -\frac{a_2}{a_{22}}$.
4. $U_1 = \frac{a_2 a_{12} - a_1 a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \ U_2 = -\frac{a_2 a_{11} - a_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$.

Исследуем эти точки на устойчивость.

1. Рассмотрим нулевое решение $U_1 = U_2 = 0$.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^2 + \lambda(-a_1 - a_2) + a_1 a_2 = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = a_1$, $\lambda_2 = a_2$.

Коэффициенты a_1 и a_2 – действительные числа. Если a_1, a_2 <0, тогда данная особая точка – устойчивый узел. Если a_1, a_2 >0, тогда данная особая точка – неустойчивый узел. Если a_1, a_2 разных знаков, тогда данная особая точка – седло (неустойчива).

На бифуркационной диаграмме с осью абсцисс a_1 и осью ординат a_2 ситуация такова: в квадранте I наблюдается неустойчивый узел, во II и IV седло, в III – устойчивый узел.

2. Точки $U_1 = -\frac{a_1}{a_{11}}, \ U_2 = 0$ и $U_1 = 0, \ U_2 = -\frac{a_2}{a_{22}}$ исследуем на примере точки

$$U_1 = -\frac{a_1}{a_{11}}, \ U_2 = 0.$$

Исследуем устойчивость этого стационарного состояния методом Ляпунова [2]. Введем новую переменную ξ, характеризующую отклонение переменной U_1 от нулевого состояния: $U_1(t) = \xi(t) - \frac{a_1}{a_{11}}$.

Линеаризованная система в новых переменных имеет вид:

$$\frac{d\xi}{dt} = -a_1\xi - \frac{a_{12}a_1}{a_{11}}U_2,$$

$$\frac{dU_2}{dt} = \left(a_2 - \frac{a_{21}a_1}{a_{11}}\right)U_2.$$

Ее характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -a_1 - \lambda & -\frac{a_{12}a_1}{a_{11}} \\ 0 & a_2 - \frac{a_{21}a_1}{a_{11}} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

имеет корни:

$$\lambda_1 = -a_1; \;\; \lambda_2 = \frac{a_2 a_{11} - a_1 a_{21}}{a_{11}}.$$

Характер этой особой точки зависит от выбора параметров a_i и a_{ij}.

Условием устойчивости данного состояния равновесия является наличие отрицательной действительной части корней λ_1 и λ_2. Так как в модели все параметры a_i и a_{ij} – действительные числа, то видно, что λ_1 и λ_2 тоже будут действительными. Значит, состояние будет устойчиво в том случае, если:

$-a_1 < 0$ и $\dfrac{a_2 a_{11} - a_1 a_{21}}{a_{11}} < 0$.

Необходимо выяснить, при каких параметрах a_i и a_{ij} это будет выполняться. Очевидно, что a_1 должно быть больше нуля: $a_1 > 0$.

Обозначим $\sigma(a_1) = \dfrac{a_2 a_{11} - a_1 a_{21}}{a_{11}}$. Для устойчивости должно соблюдаться $\sigma(a_1) < 0$.

На бифуркационной диаграмме с осью абсцисс a_1 и осью ординат σ ситуация такова: в квадрантах I и III наблюдается седло, во II – неустойчивый узел, в IV – устойчивый узел.

3. Рассмотрим особую точку $U_1 = \dfrac{a_2 a_{12} - a_1 a_{22}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$, $U_2 = -\dfrac{a_2 a_{11} - a_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$.

Также исследуем устойчивость этого стационарного состояния методом Ляпунова. Введем новые переменные ξ, η, характеризующие отклонения переменных U_1 и U_2 от нулевого состояния.

Линеаризованная система в новых переменных примет вид:

$$\frac{d\xi}{dt} = (a_1 + a_{12} n + 2a_{11} m)\xi + a_{12} m \eta,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = a_{21} n \xi + (a_2 + a_{21} m + 2a_{22} n)\eta.$$

Ее характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_{12} n + 2a_{11} m - \lambda & a_{12} m \\ a_{21} n & a_2 + a_{21} m + 2a_{22} n - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Для их поиска корней этого уравнения воспользуемся пакетом Mathcad, получим:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_2 a_{11} a_{12} - a_1 a_{11} a_{22} - a_2 a_{11} a_{22} + a_1 a_{21} a_{22}}{2(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})} \pm \frac{\sqrt{r}}{2(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})},$$

где

$$r = a_1^2 a_{12}^2 a_{22}^2 + 2a_1^2 a_{11} a_{21} a_{22}^2 - 4a_1^2 a_{12} a_{21}^2 a_{22} + a_1^2 a_{21}^2 a_{22}^2 - 2a_1 a_2 a_{11}^2 a_{12} a_{22} - 2a_1 a_2 a_{11}^2 a_{22}^2 +$$
$$+ 2a_1 a_2 a_{11} a_{12} a_{21} a_{22} - 2a_1 a_2 a_{11} a_{21} a_{22}^2 + 4a_1 a_2 a_{12}^2 a_{21}^2 + a_2^2 a_{11}^2 a_{12}^2 + 2a_2^2 a_{11}^2 a_{12} a_{22} +$$
$$+ a_2^2 a_{11}^2 a_{22}^2 - 4a_2^2 a_{11} a_{12}^2 a_{21}.$$

Если $r < 0$, корни λ_1 и λ_2 комплексно сопряженные. В этом случае точка $U_1 = \dfrac{a_2 a_{12} - a_1 a_{22}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$, $U_2 = -\dfrac{a_2 a_{11} - a_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$ является фокусом (устойчивым или неустойчивым). Условием устойчивости этой особой точки будет отрицательность действительной части корней λ_1 и λ_2, т. е.

$$\frac{a_2 a_{11} a_{12} - a_1 a_{11} a_{22} - a_2 a_{11} a_{22} + a_1 a_{21} a_{22}}{2(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})} < 0.$$

Если $r > 0$, корни λ_1 и λ_2 действительные. Условием устойчивости будет отрицательность обоих корней.

Для достижения устойчивости модели (2) необходимо подобрать такие коэффициенты a_i и a_{ij}, при которых вышеуказанные условия будут выполняться.

Далее рассмотрим следующий вид вольтеровской модели – модель выбора единого генетического кода. Она описывается системой:

$$\frac{dU_i}{dt} = U_i - \sum_{j \neq i}^{N} U_i U_j - aU_i^2 , \tag{4}$$

где $U_i(U_j)$ – концентрация объектов *i*-го (*j*-го) типа, *t* – время; первый член описывает репродукцию, второй – антагонистическое взаимодействие разных объектов, третий – эффект «тесноты», т. е. конкуренцию одинаковых объектов. Такая модель называется *моделью репродукции ДНК*.

Исследуем модель для *N*-мерного случая ($N \geq 4$).

Эта система имеет 2^N стационарных точек, которые получаются, если приравнять все уравнения системы (4) к нулю и которые можно объединить в 7 групп:

1. $U_1 = U_2 = U_3 = ... = U_N = 0$. Эта точка – неустойчивый узел.

2. Вторую группу стационарных точек объединяет свойство: одна координата $U_i = \frac{1}{a}$, остальные $U_J = 0$, $(i \neq j)$.

3. Третья группа стационарных точек имеет координаты вида:

$$U_i = \frac{1}{a+1},\ U_j = \frac{1}{a+1}, \text{ остальные } U_k = 0,\ (k \neq i, k \neq j).$$

4. Четвертая группа точек имеет координаты:

$$U_i = \frac{1}{a+2},\ U_j = \frac{1}{a+2},\quad U_k = \frac{1}{a+2}, \text{ остальные } U_s = 0,\ (s \neq i, s \neq j, s \neq k).$$

5. *N* точек пятой группы имеют координаты, в которых одно значение $U_i = 0$, остальные $U_J = \frac{1}{a+N-2}$, $(i \neq j)$.

6. И, единственная стационарная точка со всеми ненулевыми координатами:

$$U_1 = \frac{1}{a+N-1};\ U_2 = \frac{1}{a+N-1};\ U_3 = \frac{1}{a+N-1};\ldots;\ U_N = \frac{1}{a+N-1}. \tag{5}$$

Во всех стационарных точках, кроме точки (5), система (4) неустойчива. Исследуем устойчивость стационарного состояния (5) методом Ляпунова. Корни характеристического уравнения имеют вид:

$$\lambda_1 = -1;\ \lambda_2 = -\frac{a-1}{a+N-1};\quad \lambda_3 = -\frac{a-1}{a+N-1};\quad \ldots\ ;\quad \lambda_N = -\frac{a-1}{a+N-1}.$$

Характер особой точки (5) зависит от выбора параметра a.

Если $0 < a < 1$, то корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_N$ разных знаков. Значит, при $0 < a < 1$

$$U_1 = \frac{1}{a+N-1};\ U_2 = \frac{1}{a+N-1};\ U_3 = \frac{1}{a+N-1};\ldots;\ U_N = \frac{1}{a+N-1} \text{ – } \textit{седло.}$$

Если $a > 1$, то все корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_N$ <0. Следовательно, при $a > 1$ особая *т*

$$U_1 = \frac{1}{a+N-1};\ U_2 = \frac{1}{a+N-1};\ U_3 = \frac{1}{a+N-1};\ldots;\ U_N = \frac{1}{a+N-1} \text{ – } \textit{устойчивый узел.}$$

Это справедливо для любой размерности модели репродукции ДНК.

Исследование двух типов вольтерровских моделей динамики *N* взаимодействующих популяций выявило зависимость поведения модели от выбора управляющих параметров.

Литература

1. Ризниченко Г. Ю. Математические модели в биофизике и экологии. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. С. 105.
2. Притула Т. К., Адамчук А. С., Амироков С. Р. Об устойчивых состояниях трехвидовой вольтерровской системы // Сборник научных трудов. Пятая международная научно-техническая конференция «Инфокоммуникационные технологии в науке, производстве и образовании». Кисловодск; Ставрополь, 2012. С. 105.

УДК 519.5

Рыскаленко Роман Андреевич, Черкасова Ирина Викторовна

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ В ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ПЕРЕНОСА

Рассматривается нестационарное уравнение переноса примесей в атмосфере и для него выполняется построение итерационного вычислительного алгоритма на основе операторов обобщенного дифференцирования функций, соответствующих эмпирическим данным задачи, представляемых сингулярными интегралами.

Ключевые слова: нестационарное уравнение переноса примесей в атмосфере, итерационный вычислительный алгоритм, сингулярные интегралы, численные исследования.

Riskalenko Roman Andreevich, Cherkasova Irina Viktorovna

INTEGRATED REPRESENTATIONS OF FUNCTIONS IN NUMERICAL METHODS OF THE SOLUTION OF NON-STATIONARY PROBLEMS OF TRANSFER

The non-stationary equation of transfer of impurity in the atmosphere is considered and for it creation of iterative computing algorithm on the basis of operators of the generalized differentiation of the functions corresponding to empirical data of a task, represented in singular integrals is carried out.

Keywords: non-stationary equation transfer of impurity in the atmosphere, iterative computing algorithm, singular integrals, numerical researches.

В настоящей работе рассматривается нестационарное уравнение переноса примесей в атмосфере и для него выполняется построение вычислительного алгоритма на основе операторов обобщенного дифференцирования функций, соответствующих эмпирическим данным задачи, представляемых сингулярными интегралами. Подобные операторы также используются в работе для нахождения приближенных решений исходного дифференциального уравнения. В итоге задача сводится к построению интегрального уравнения Вольтерра второго рода и решается методом последовательных приближений, что приводит к построению соответствующего итерационного алгоритма.

В ранее опубликованных работах авторов [1, 2] разрабатывались численные методы и алгоритмы (итерационные и рекурсивные) для решения нестационарных задач переноса субстанции в природных средах на основе операторов обобщенного дифференцирования в случае использования эмпирических данных. Предлагаемые алгоритмы численного дифференцирования определены вполне корректно на множествах приближенно заданных функций и основаны на их предварительном усреднении (сглаживании) в области определения. Вместе с тем в подобных задачах могут быть использованы и более точные аналитические методы для построения операторов обобщенного дифференцирования в прикладном анализе. В пределах данной работы предлагается метод построения операторов обобщенного дифференцирования исследуемых функций на основе их представления соответствующими сингулярными интегралами. Теория сингулярных интегралов функций была развита А. Лебегом [3, 4] и использовалась при решении задач теории приближения функций [5]. Примерами таких интегралов служат интегралы Дирихле $D_n(x, f)$ в гармоническом анализе, интегралы Пуассона $P_n(x, f)$ в теории гармонических функций и другие. Подобные аппа-