

Результаты численного исследования скорости сходимости данного качественного метода приведены в таблице 1, анализ которых показывает, что представленный в работе итерационный метод при выбранных исходных данных обладает не очень высокой скоростью сходимости. Однако это не уменьшает его значимости, поскольку приближенное качественное решение $\tilde{q}$, полученное в результате проведенных расчетов, может быть использовано в виде исходных данных в работе других более точных алгоритмов.

Литература

1. Наац В. И., Наац И. Э. Математические модели и численные методы в задачах экологического мониторинга атмосферы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 328 с.
2. Наац В. И., Ярцева Е. П. Численное исследование рекурсивных и итерационных алгоритмов в задаче моделирования переноса аэрозолей в атмосфере // Вестник Ставропольского государственного университета. 2011. Вып. 75 [4]. С. 44–50.
3. Ярцева Е. П., Наац В. И. Итерационный метод численного решения уравнения переноса примесей в атмосфере // «Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий»: материалы VI Всероссийской открытой научно-практической конференции. Сочи, 2010. С. 178–180.

УДК 519.5, 519.6

Наац Игорь Эдуардович, Артемов Сергей Владимирович

ИТЕРАЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА НА ОСНОВЕ ОПЕРАТОРОВ ОБОБЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Излагается новый подход к построению оператора обобщенного дифференцирования и разработке на его основе итерационного алгоритма для модели переноса субстанции в атмосфере.

Ключевые слова: оператор обобщенного дифференцирования, уравнение переноса субстанции, итерационный алгоритм.

Naac Igor Eduardovich, Artemov Sergey Vladimirovich

ITERATIVE ALGORITHMS FOR NUMERICAL SOLUTION OF TRANSFER BASED GENERALIZED DIFFERENTIAL OPERATORS

The new approach to construction of the operator of generalized differentiation and development on the basis of the iterative algorithm for the model of substance transport in the atmosphere.

Key words: generalized differentiation operator, the equation of transfer of substance, an iterative algorithm.

Представленная работа продолжает исследование авторов по разработке численных методов и программного обеспечения информационно-измерительных систем оперативного прогноза пространственно-временной изменчивости поля концентрации загрязняющих веществ в пограничном слое атмосферы [1, 2, 3]. Построение соответствующих алгоритмов во многом связано с приближенными решениями уравнения переноса субстанции в атмосфере, которое в простейшем виде записывается так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha(t) \cdot u = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (V(x, t) \cdot u) + S(x, t), \quad (1)$$

где функции $V(x, t)$, $K(x, t)$, $\alpha(t)$ и $S(x, t)$, определенные в области $\Omega = \Omega_x \times \Omega_t = [a, b] \times [t_0, T]$, считаются заданными, а $u(x, t)$ – концентрация контролируемой субстанции – подлежит определению.

Особенностью задач мониторинга реальных сред и прогнозирования пространственно-временной изменчивости их характеристик является необходимость привлечения в той или иной форме эмпирических данных, и так называемых «полуэмпирических» формул, описывающих приближенно возможные функциональные зависимости между указанными выше функциями. В частности, в случае диффузного переноса (1) вполне могут быть использованы зависимости между значе-

ниями поля коэффициента турбулентности диффузии $K(x, y, z, t)$ и компонентами скорости ветра $\vec{V}(x, y, z, t)$ в пограничном слое атмосферы [2].

Введение в модель переноса (1) приближенно заданных функций, скажем, $\tilde{V}(x, t)$ и $\tilde{K}(x, t)$, приводит к известным затруднениям при вычислениях, в которых требуется значение их производных. Подобные проблемы в практике вычислений получили название проблемы «усвоения» эмпирических данных в вычислительных моделях алгоритмов, создаваемых на основе дифференциальных уравнений. Существо затруднений можно пояснить следующими формальными построениями. Допустим, что $V(x, t)$ представлено в вычислениях своим так называемым σ -приближением, т. е. функцией $V_\sigma(x, t)$, такой, что выполняется следующее неравенство

$$\|V_\sigma(x, t) - V_0(x, t)\| \leq \sigma \|V_0(x, t)\|, \quad (2)$$

где σ – достаточно малое число ($\sigma > 0$), а $V_0(x, t)$ гипотетически «точное» значение поля в точке $(x, t) \in \Omega$. Функция $V_\sigma(x, t)$ формально не дифференцируема, если в качестве оператора дифферен-

цирования использовать $D = \frac{d}{dx}$. Практически последнее означает, что при $\sigma \rightarrow 0$ величина

$|DV_\sigma - DV_0|$ может быть сколь угодно большой, в то время как левая часть (2) ведет себя при таких же условиях вполне регулярно. Применительно к уравнению (1) можно говорить, что оператор «обычного»

дифференцирования $D = \frac{d}{dx}$ не определен на множестве приближенных данных $B_\sigma = \{(V_\sigma, K_\sigma)\}$. Пре-

одолеть данную трудность можно путем построения так называемого «оператора» обобщенного дифференцирования $\tilde{D}_x$ с учетом функций из множества B_σ . Соответствующие подходы в прикладном анализе известны и основаны на возможных интегральных соотношениях между дифференцируемой функцией $f(x)$, $x \in [a, b]$ и ее производной $f'(x)$. Наиболее простым примером служит соотношение:

$$\int_a^x f'(x') dx' = f(x) - f(a). \quad (3)$$

Выражение (3) определяет некий интегральный оператор $K : f' \rightarrow f$, где $f \in C_1(\Omega_x)$. Используя это выражение, можно построить следующий вариант оператора обобщенного дифференцирования:

$$(\tilde{D}_\alpha f)(x) = (\hat{K}_\alpha^{-1} F(f))(x). \quad (4)$$

В основе определения (4) лежат следующие соотношения (алгоритм численного построения $\tilde{D}_\alpha$):

$$\int_a^b \hat{K}(x, x') f'(x') dx' = F(x, f), \quad (5)$$

где

$$\hat{K}(x, x') = \begin{cases} b - x', & a \leq x' < x \\ b - x, & x < x' \leq b \end{cases}, \quad (6)$$

$$F(x, f) = \int_a^b [f(x') - f(a)] dx', \quad (7)$$

$$\hat{K}_\alpha^{-1} = (\hat{K}^* K + \alpha I)^{-1} K^*. \quad (8)$$

Подробное изложение построения оператора $\tilde{D}_\alpha$, определяемого соотношениями (5) – (8) на основе (3), можно найти в работах авторов [3]. Использование в схеме вычислений обобщенного оператора обратного K_α^{-1} для исходного интегрального оператора $\hat{K}$ в (5) делает оператор $\tilde{D}_\alpha$ устойчивым на множестве приближенных данных. Иными словами, функции $(\tilde{D}_{x,\alpha} V_\sigma)(x, t)$ и $(\tilde{D}_{x,\alpha} K_\sigma)(x, t)$ вполне определены на множестве B_σ . Выбор параметра регуляризации α ($\alpha > 0$) в (8) осуществляется согласно методикам применяемым при обобщенной инверсии операторов в некорректно поставленных задачах [4] в зави-

симости от значения коэффициента σ , характеризующего меру неопределенности в исходных данных (V_σ, K_σ) . Нетрудно доказать справедливость следующего предельного соотношения:

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \sigma \rightarrow 0}} (\tilde{D}_\alpha f_\sigma)(x) = (D f_0)(x), \quad (9)$$

для всех x из интервала $[a, b]$, в которых $f_0(x)$ имеет обычную производную $f'_0(x)$. Соотношение (9) определяет содержательный смысл используемого в работе термина «оператор обобщенного дифференцирования». В качестве исходного функционального класса, которому могут принадлежать функции $f_\sigma(x)$, дифференцируемые в обобщенном смысле, примем $C_\Sigma(\Omega_x)$ (то же без ограничения общности $L_1(\Omega_x)$).

В рамках вышеизложенного подхода, связанного с введением оператора $\tilde{D}_{x,\alpha}$, вместо $D_x = \frac{d}{dx}$, исходное уравнение (1) можно заменить эквивалентным ему приближенным аналогом

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha(t) \cdot u = -((\tilde{D}_{x,\alpha} \circ \tilde{Q}_{\alpha(\sigma)} u))(x, t) + S(x, t), \quad (10)$$

где оператор $\tilde{Q}_{\alpha(\sigma)}$ определен на B_σ и имеет выражение:

$$\tilde{Q}_{\alpha(\sigma)} = V_\sigma(x, t)I - K_\sigma(x, t)\tilde{D}_{x,\alpha}. \quad (11)$$

Решением операторного уравнения (10) являются параметризованные (регуляризованные) последовательности функций:

$$\{u_{\alpha(\sigma)}(x, t)\} \quad (\alpha > 0, \alpha(\sigma) \rightarrow 0 \text{ при } \sigma \rightarrow 0).$$

Заметим, что уравнение вида $\dot{u} + \alpha(t)u = Lu + S$ вполне разрешимо, если оператор L вполне непрерывен, что вытекает из теории существования решения для уравнения параболического типа. В контексте изложенной здесь теории, предназначенной для численного решения прикладных задач, важным является следующее утверждение.

Теорема: Последовательность регуляризованных решений $u_{\alpha(\sigma)}(x, t)$ уравнения (10) сходится к решению уравнения (1) $u_0(x, t)$ при $\alpha \rightarrow 0$ ($\alpha(\sigma) \rightarrow 0, \sigma \rightarrow 0$) в метрике, индуцируемой нормой $L_1(\Omega)$, т. е.

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \sigma \rightarrow 0}} \|u_{\alpha(\sigma)}(x, t) - u_0(x, t)\|_{L_1(\Omega)} = 0. \quad (12)$$

Приведем вариант краткого обоснования справедливости этого утверждения, в большой мере ориентированного на содержательную сторону соответствующих вычислительных алгоритмов. Операторное уравнение (10) позволяет записать следующее интегральное представление для искомой функции:

$$u_{\alpha(\sigma)}(x, t) = - \int_{t_0}^t K(t, t') ((\tilde{D}_{x,\alpha} \circ \tilde{Q}_{\alpha(\sigma)} u)(x, t')) dt' + \bar{S}(x, t), \quad (13)$$

$$K(t, t') = \exp \left\{ - \int_{t'}^t \alpha(t'') dt'' \right\}, \quad \alpha(t) > 0, \quad (14a)$$

$$\bar{S}(x, t) = \int_{t_0}^t K(t, t') S(x, t') dt' + u(t_0, x) \cdot \exp \left\{ - \int_{t_0}^t \alpha(t') dt' \right\}. \quad (14b)$$

Выражение (13) можно положить в основу итерационной схемы для определения последовательности приближенных решений

$$\{u_{\alpha(\sigma)}^{(v)}(x, t)\} \quad (v = 1, 2, \dots).$$

Как обычно, для линейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода в качестве нулевого приближения выбирается

$$u_{\alpha(\sigma)}^{(0)}(x, t) = \bar{S}(x, t).$$

Соответствующая итерационная схема имеет вид:

$$u_{\alpha(\sigma)}^{(v)}(x, t) = - \int_{t_0}^t K(t, t') \left((\tilde{D}_{x,\alpha} \circ \tilde{Q}_{\alpha(\sigma)}) u^{(v-1)} \right) (x, t') dt' + \bar{S}(x, t). \quad (15)$$

Для исследования сходимости подобных вычислительных процессов требуется надлежащий выбор норм для уклонений вида $(\Delta^{(v,v-1)}u)(x, t) = u^{(v)}(x, t) - u^{(v-1)}(x, t)$ в точках $(x, t) \in \Omega = \Omega_x \times \Omega_t$. Исходя из представления (13), искомую функцию $u_{\alpha(\sigma)}(x, t)$ по переменной $t \in \Omega_t$ можно считать непрерывной и построить для нее $\sup$ -норму. Для характеристики указанных выше уклонений по переменным $x \in \Omega_x$ с учетом того, что говорилось выше об области определения оператора $\tilde{D}_{x,\alpha}$, используем норму в $L_1(\Omega_x)$. С учетом этих замечаний имеем:

$$\|\Delta^{(v,v-1)}u\|_{L_1(\Omega_x)}(t) = \int_{\Omega_x} |u^{(v)}(x, t) - u^{(v-1)}(x, t)| dx. \quad (16)$$

Используя выражение (15), приходим к следующему неравенству:

$$\begin{aligned} \|\Delta^{(v,v-1)}u\|_{L_1(\Omega_x)}(t) &= \int_{\Omega_x} \left| \int_{t_0}^t K(t, t') \left[\left((\tilde{D}_{x,\alpha} \circ \tilde{Q}_{\alpha(\sigma)}) \Delta^{(v-1,v-2)}u \right) (x, t') dt' \right] \right| dx \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t K(t, t') dt' \int_{\Omega_x} \left| \left((\tilde{D}_{x,\alpha} \circ \tilde{Q}_{\alpha(\sigma)}) \Delta^{(v-1,v-2)}u \right) (x, t') \right| dx. \end{aligned} \quad (17)$$

Поскольку $0 < K(t, t') \leq 1$ при всех $(t, t') \in \Omega_t \times \Omega_{t'}$, то

$$\|\Delta^{(v,v-1)}u\|_{L_1(\Omega)}(t) \leq \int_{t_0}^t dt' \int_{\Omega_x} \left| \left((\tilde{D}_{x,\alpha} \circ \tilde{Q}_{\alpha(\sigma)}) \Delta^{(v-1,v-2)}u \right) (x, t') \right| dx. \quad (18)$$

Исходя из определения нормы ограниченного оператора, скажем A , определенного на U , а именно,

$\|A\| = \sup_{u \in U} \frac{\|Au\|}{\|u\|}$, последнее неравенство можно представить в виде:

$$\|\Delta^{(v,v-1)}u\|_{L_1(\Omega_x)}(t) \leq \int_{t_0}^t dt' \left\| \tilde{D}_{x,\alpha} \circ \tilde{Q}_{\alpha(\sigma)} \right\|_{L_1(\Omega_x)}(t') \cdot \|\Delta^{(v-1,v-2)}u\|_{L_1(\Omega_x)}(t'). \quad (19)$$

Поскольку правая часть выражения (19) представляется в виде интеграла $\int_{t_0}^t B(t') \varphi^{(v-1,v-2)}(t') dt'$, то для его вычисления может быть использована стандартная формула, а именно

$$\int_{t_0}^t f(t_1) dt_1 \int_{t_0}^{t_1} f(t_2) dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{v-1}} f(t_v) dt_v = \frac{1}{v!} \left[\int_{t_0}^t f(t) dt \right]^v. \quad (20)$$

В итоге, используя прием последовательной подстановки, получим оценку

$$\|\Delta^{(v,v-1)}u\|_{L_1(\Omega_x)}(t) \leq \frac{1}{v!} \left[\int_{t_0}^t \left\| \tilde{D}_{x,\alpha} \circ \tilde{Q}_{\alpha(\sigma)} \right\|_{L_1(\Omega_x)}(t') \cdot \|\Delta^{(1,0)}u\|_{L_1(\Omega_x)}(t') dt' \right]^v, \quad (21)$$

или

$$\|\Delta^{(v,v-1)}u\|_{L_1(\Omega)} \leq \frac{1}{v!} \left[\left\| \tilde{D}_{x,\alpha} \circ \tilde{Q}_{\alpha(\sigma)} \right\|_{L_1(\Omega)} \cdot \|\Delta^{(1,0)}u\|_{L_1(\Omega)} \right]^v. \quad (22)$$

При переходе от (21) к (22) использовано очевидное соотношение $\left\| \left\| \varphi \right\|_{L_1(\Omega_x)}(t) \right\|_{C(\Omega_t)} \leq \left\| \varphi \right\|_{L_1(\Omega)}$. Нера-

венство (22) позволяет утверждать, что условие $\left\| \tilde{D}_{x,\alpha} \circ \tilde{Q}_{\alpha(\sigma)} \right\| \leq A$, где A любое конечное число

$\|\Delta^{(v,v-1)}u\|_{L_1(\Omega)} \rightarrow 0$ при $v \rightarrow \infty$. То, что последовательность приближенных решений $u_{\alpha(\sigma)}^{(v)}(x,t)$ сходится в каждой точке $(x,t) \in \Omega$ при $v \rightarrow \infty$, то ее можно рассматривать как необходимое условие для выполнения (12), т.е. предельного соотношения:

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ v \rightarrow \infty}} \|u_{\alpha(\sigma)}^{(v)} - u_0(x,t)\|_{L_1(\Omega)} = 0. \quad (23)$$

В заключение остается заметить, что введенный выше оператор обобщенного дифференцирования $\tilde{D}_{x,\alpha}$ является ограниченным и вполне непрерывным при $\alpha > 0$. Последнее влечет ограниченность и непрерывность оператора $\tilde{Q}_{\alpha(\sigma)}$, как определяющего оператора модели (10).

Для того чтобы дать более наглядное представление об операторе $(\tilde{D}_{x,\alpha} \circ \tilde{Q}_{\alpha(\sigma)})$, в итерационной схеме (15) прибегнем к методам качественного анализа в пределах изложенной выше теории.

С этой целью исходную модель (1) представим в параметризованной форме [1], а именно

$$\frac{\partial u}{\partial \hat{t}} + \hat{\alpha}(\hat{t})u = \beta \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left(\hat{K}(\hat{x}, \hat{t}) \frac{\partial u}{\partial \hat{x}} - \gamma \frac{\partial}{\partial \hat{x}} (\hat{V}(\hat{x}, \hat{t})u) \right) + \bar{S}(\hat{x}, \hat{t}), \quad (24)$$

$$\hat{t} = \frac{t}{T}, \quad (0 \leq \hat{t} \leq 1), \quad \hat{\alpha} = \alpha \cdot T, \quad \hat{K}(\hat{x}, \hat{t}) = \frac{\hat{K}(\hat{x}, \hat{t})}{K_{\max}}, \quad \hat{V}(\hat{x}, \hat{t}) = \frac{\hat{V}(\hat{x}, \hat{t})}{V_{\max}}, \quad \hat{x} = \frac{x-a}{b-a}, \quad (0 \leq \hat{x} \leq 1),$$

$$\beta = \frac{K_{\max}}{L^2}, \quad \gamma = \frac{V_{\max} T}{L}, \quad \bar{S} = T \cdot S, \quad L = b - a.$$

Безразмерные коэффициенты β и γ можно рассматривать как параметры функциональной модели (24). В определенной степени они характеризуют меру функциональной зависимости искомого решения u от исходных данных $\{(V, K)\}$ при прочих равных условиях. С учетом проведенной нормировки оператор $\tilde{Q}_{\alpha(\sigma)}$ примет вид:

$$\tilde{Q}_{\alpha(\sigma)} = \gamma \hat{V}_{\sigma}(\hat{x}, \hat{t})I - \beta \hat{K}_{\sigma}(\hat{x}, \hat{t})\tilde{D}_{x,\alpha}. \quad (25)$$

Поскольку $\|\hat{V}\| = 1$, $\|\hat{K}\| = 1$, то используя известное неравенство в теории норм, а именно,

$$\|v_1\| - \|v_2\| < \|v_1 - v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|,$$

где v_1, v_2 любые отличные друг от друга элементы рассматриваемого нормированного пространства, придем к следующей оценке для нормы оператора (25):

$$|\gamma - \beta \|\tilde{D}_{x,\alpha}\| < \|\tilde{Q}_{\alpha(\sigma)}\| < (\gamma + \beta \|\tilde{D}_{x,\alpha}\|). \quad (26)$$

С учетом того, что $\|\tilde{D}_{x,\alpha} \circ \tilde{Q}_{\alpha(\sigma)}\| \leq \|\tilde{D}_{x,\alpha}\| \cdot \|\tilde{Q}_{\alpha(\sigma)}\|$, остается указать на возможную зависимость $\|\tilde{D}_{x,\alpha}\|$ от параметра регуляризации α . В работе [1] показано, что для обобщенного обратного оператора (4) справедлива оценка:

$$\|K_{\alpha}^{-1}\| < \frac{\|K\|}{\|K\|^2 + \alpha}. \quad (27)$$

Поскольку для оператора K , определяемого интегралом (5),

$$\|K\|_{L_2(0,1)} \leq \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad (28)$$

то окончательно имеем

$$\|\tilde{D}_{x,\alpha}\|_{L_2(\Omega_x)} \leq \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{1+\alpha}, \quad (\alpha > 0). \quad (29)$$

Остается напомнить, что надлежащее значение параметра α определяется в значительной степени значением параметра σ , характеризующего меру неопределенности в исходных данных B_{σ} . Соотношения (26) и (29) дают представление о роли параметров β , γ и α в регуляризации модели (10), эквивалентной в обобщенном смысле исходной задаче (1). Вопросы оптимизации выбора пара-

метров β, γ, α осуществляется с учетом эффективности итерационных схем (15) на множестве исходных данных B_σ . Построение и исследование изложенного выше итерационного алгоритма для нестационарного уравнения переноса ранее осуществлялось в работах авторов [1, 5].

Литература

1. Наац В. И., Наац И. Э. Математические модели и численные методы в задачах экологического мониторинга атмосферы. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2010. 328 с.
2. Наац В. И., Наац И. Э. Модели переноса аэрозолей в атмосфере на основе априорных оценок значений коэффициента турбулентной диффузии, определяемых по дифференциальным характеристикам поля скорости ветра // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. № 1. Ростов-н/Д., 2008. С. 38–41.
3. Наац В. И. Определение производных эмпирических функций методом интегральных уравнений в задачах переноса // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. № 5. Приложение. Ростов-н/Д., 2005. С. 14–22.
4. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М., 1979.
5. Наац В. И., Каргин Н. И. Итерационные методы численного решения задач переноса на основе интегральных уравнений // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. № 3. Приложение. Ростов-н/Д., 2004. С. 3–16.

УДК 575.3/7

Притула Татьяна Константиновна, Адамчук Анна Станиславовна

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВЫХ СОСТОЯНИЙ МОДЕЛЕЙ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СООБЩЕСТВ

Приведены результаты исследования устойчивости на примере некоторых частных случаев модели Лотки – Вольтерра взаимодействия двух видов с разными управляющими коэффициентами, а также модели репродукции ДНК для N видов.

Ключевые слова: устойчивость, дифференциальные уравнения, модель, параметр, популяция.

Pritula Tatyana Konstantinovna, Adamchuk Anna Stanislavovna

RESEARCH OF STEADY CONDITIONS OF MODELS OF INTERACTION OF COMMUNITIES

Results of research of stability are given in article on the example of some special cases of model of Lotki – Volterra of interaction of two views with different managing directors in coefficients, and also model of a reproduction of DNA for N types.

Key words: stability, differential equations, model, parameter, population.

Общий вид вольтерровских моделей динамики n взаимодействующих популяций таков:

$$\frac{dU_i}{dt} = U_i \left(a_i + \sum_{j=1}^n a_{ij} U_j \right), \quad (1)$$

где a_i – скорость естественного прироста (смертности) i -го вида в отсутствие остальных; a_{ij} – влияние j -го вида на i -й вид.

В данной статье проводится исследование устойчивости на примере некоторых частных случаев модели (1).

Рассмотрим вольтерровскую модель взаимодействия 2-х разных популяций, т. е. систему из 2-х уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dU_1}{dt} &= a_1 U_1 + a_{12} U_1 U_2 + a_{11} * U_1^2, \\ \frac{dU_2}{dt} &= a_2 U_2 + a_{21} U_1 U_2 + a_{22} * U_2^2. \end{aligned} \quad (2)$$