

УДК 519.5, 519.6

Наац Виктория Игоревна, Ярцева Елена Павловна

РАЗРАБОТКА КАЧЕСТВЕННОЙ МОДЕЛИ И ИТЕРАЦИОННОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ ОЦЕНКИ КОНЦЕНТРАЦИИ ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ПРИМЕСЕЙ В АТМОСФЕРЕ

Рассмотрено построение качественной модели переноса загрязняющих примесей в турбулентной атмосфере на основе итерационного алгоритма, представлены результаты программной реализации метода, вычислительного эксперимента.

Ключевые слова: математические модели теории переноса, вычислительный алгоритм, численные исследования.

Naac Viktoria Igorevna, Yartseva Elena Pavlovna

THE DEVELOPMENT OF HIGH-QUALITY MODELS AND ITERATIVE ALGORITHM FOR THE ASSESSMENT OF CONCENTRATIONS OF CONTAMINANTS IN THE ATMOSPHERE

The work considers the construction of high-quality models of transfer of contaminants in the turbulent atmosphere on the basis of the iterative algorithm, presented the results of program realization of a method, computing experiment.

Key words: mathematical models of the theory of carrying over, computing algorithm, numerical researches.

Постановка задачи. Перенос загрязняющих примесей в атмосфере описывается параметризованным уравнением переноса – линейным дифференциальным уравнением в частных производных параболического типа [1] (одномерный вариант):

$$\frac{\partial \hat{q}(\hat{x}, \hat{t})}{\partial \hat{t}} + \alpha \cdot \hat{q}(\hat{x}, \hat{t}) + \beta \cdot \frac{\partial}{\partial \hat{x}} (\hat{V}(\hat{x}, \hat{t}) \cdot \hat{q}(\hat{x}, \hat{t})) - \theta \cdot \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left(\hat{K}(\hat{x}, \hat{t}) \cdot \frac{\partial \hat{q}(\hat{x}, \hat{t})}{\partial \hat{x}} \right) = \xi \cdot \hat{S}(\hat{x}, \hat{t}), \quad (1)$$

$$\hat{q}(\hat{x}, 0) = \hat{q}_0(\hat{x}), \quad \hat{q}(0, \hat{t}) = \hat{q}_1(\hat{t}), \quad \hat{q}(1, \hat{t}) = \hat{q}_2(\hat{t}), \quad (2)$$

в котором все поля (концентрация загрязняющих примесей $q(x, t)$, скорость ветра $\vec{V}(x, t)$, турбулентность $K(x, t)$, представляемая коэффициентом турбулентной диффузии и источник примесей $S(x, t)$) нормированы, то есть значения $\hat{x}, \hat{t} \in [0; 1]$, $\hat{q}(\hat{x}, \hat{t}) \in [0; 1]$, $\hat{V}(\hat{x}, \hat{t}) \in [0; 1]$, $\hat{K}(\hat{x}, \hat{t}) \in [0; 1]$ и $\hat{S}(\hat{x}, \hat{t}) \in [0; 1]$. В уравнении (1) нормировочные коэффициенты (параметры) имеют вид:

$$\alpha(t) = \alpha^* \cdot T, \quad \beta = \frac{V_{\max} \cdot T}{X}, \quad \theta = \frac{K_{\max} \cdot T}{X^2}, \quad \xi = \frac{S_{\max} \cdot T}{q_{\max}}. \quad (3)$$

Параметры (3) – безразмерные величины. Если заданы начальные и граничные условия для $\hat{q}(\hat{x}, \hat{t})$ (2) на $\Omega = [0; 1] \times [0; 1]$ и заданы значения $\alpha, \beta, \theta, \xi$ то решение уравнения (1) следует рассматривать как функцию этих параметров, а именно $\hat{q}(\hat{x}, \hat{t}, \alpha, \beta, \theta, \xi)$. Если $V^* = V_{\max}$ и $K^* = K_{\max}$ определены однозначно, то параметры β и θ определяют X и T следующим образом:

$$X = \frac{K_{\max} \cdot \beta}{V_{\max} \cdot \theta} = \frac{K^* \cdot \beta}{V^* \cdot \theta}, \quad T = \frac{K_{\max} \cdot \beta^2}{V_{\max}^2 \cdot \theta} = \frac{K^* \cdot \beta^2}{V^{*2} \cdot \theta}.$$

Таким образом, определяются пространственно-временные интервалы в исходной модели (1) – (2). Кроме того, предполагается, что все исходные данные представлены массивами дискретных измерений, полученных в эксперименте с определенными погрешностями. Все это обуславливает необходимость построения эффективных вычислительных алгоритмов, обеспечивающих сходимость и устойчивость получаемых решений к погрешностям в исходных данных.

Изложенный ранее подход к построению вычислительных алгоритмов в теории переноса, основанный на предварительном преобразовании дифференциального уравнения в частных производных в ин-

тегро-дифференциальное [2] может быть одновременно использован для построения простых расчетно-аналитических моделей в рассматриваемой теории. Эта возможность связана с тем, что интегральные уравнения Вольтерра второго рода эффективно решаются методом последовательного приближения, то есть алгоритмически сводятся к итерационным вычислительным схемам. Известно, что если интегральное уравнение Вольтерра второго рода построено достаточно качественно (его ядро подобрано надлежащим образом), то уже первое приближение в итерационном процессе дает неплохое представление об аналитических свойствах искомого решения. Важно также заметить, что во многих случаях в качестве нулевого приближения в этих задачах достаточно использовать свободный член интегрального уравнения. Остается лишь в рассматриваемую задачу ввести те или иные частные допущения, чтобы интеграл, связанный с вычислением первого приближения, брался аналитическими методами. То, что получается в результате подобного подхода ниже будет называться приближенной расчетно-аналитической моделью в теории переноса субстанции в пограничном слое атмосферы. В качестве примера рассмотрим итерационный процесс:

$$\begin{cases} q^{(v)}(t|x) = \varphi(t|x) - \int_0^t \tilde{K}(t, t', x) \cdot \psi^{(v-1)}(t'|x) dt' \\ \psi^{(v)}(t|x) = (V(x, t) - K'(x, t)) \cdot (q'(x, t))^{(v)} - K(x, t) \cdot (q''(x, t))^{(v)}, \end{cases} \quad (4)$$

для уравнения турбулентной диффузии, записанного в форме

$$\dot{q} + (\alpha + V')q = S(x, t) - [(V - K')q' - Kq'']. \quad (5)$$

Первое приближение для этого процесса дано интегралом:

$$q^{(1)}(t|x) = \varphi(t', x) - \int_0^t \tilde{K}(t, t', x) \cdot \psi[t', \varphi(t', x), x] dt', \quad 0 \leq x \leq X, \quad (6)$$

который и постараемся свести ниже к достаточно простому аналитическому выражению, позволяющему последовательно исследовать влияние тех или иных параметров задачи на искомое решение. Ясно, что упрощение аналитических выражений, включающих в себя операцию интегрирования или дифференцирования функции, требует ввести допущение о характере поведения этих функций, которые далее бы исключили указанные операции в этих выражениях. Если речь идет о первой итерационной схеме (6), то упростить ядро

$$\tilde{K}(x, t, t') = \exp \left\{ - \int_{t'}^t \left(\alpha(t'') + \beta \cdot \frac{\partial V(x, t'')}{\partial x} \right) dt'' \right\} \quad (7)$$

можно, если положить $V(x, t) = const$, $V'_x = 0$, а также считать $\alpha(t)$ константой, равной α .

Обратимся к полученному ранее [3] выражению для функции $q(x, t)$:

$$q(x, t) = \varphi(x, t) - \int_{t_0}^t \tilde{K}(x, t, t') \cdot \psi(x, t') dt', \quad (8)$$

где

$$\varphi(x, t) = q(x, t_0) \cdot \exp \left\{ - \int_{t_0}^t \left(\alpha(t') + \beta \cdot \frac{\partial V(x, t')}{\partial x} \right) dt' \right\} + \int_{t_0}^t \xi \cdot S(x, t') \cdot \tilde{K}(x, t, t') dt'. \quad (9)$$

Итак, приведенные условия позволяют записать (7) следующим образом:

$$\tilde{K}(t, t') = \exp \left\{ - \int_{t'}^t \alpha(t'') dt'' \right\} = \exp \left\{ - \alpha \cdot t''|_{t'}^t \right\} = e^{-\alpha(t-t')}, \quad 0 \leq t' \leq t. \quad (10)$$

Здесь ядро интегрального уравнения (8) перестает зависеть от переменной x . Подобное допущение применим и к функционалу:

$$\psi = q'_x (\beta V - \theta K'_x) - q''_{xx} (\theta K), \quad (11)$$

то есть, полагаем $K(x, t) = const$, $K'_x = 0$, в результате придем к выражению:

$$\psi(x, t, q', q'') = \beta V q'_x - \theta K q''_{xx}. \quad (12)$$

Свободный член (9) в уравнении (8) при условиях $V' = 0$, $K' = 0$, уже исследованных ранее, принимает вид:

$$\begin{aligned} \varphi(x, t) &= q(x, 0) \cdot \tilde{K}(t, 0) + \int_0^t \xi \cdot S(x, t') \cdot \tilde{K}(t, t') dt' = \\ &= q(x, 0) \cdot e^{-\alpha t} + \int_0^t \xi \cdot e^{-\alpha(t-t')} \cdot S(x, t') dt'. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, основные расчетные формулы метода приняли следующий вид:

$$q(x, t) = \varphi(x, t) - \int_0^t \tilde{K}(t, t') \psi(x, t') dt', \quad (14)$$

где

$$\varphi(x, t) = q(x, 0) \cdot e^{-\alpha t} + \int_0^t \xi \cdot e^{-\alpha(t-t')} \cdot S(x, t') dt', \quad (15)$$

$$\tilde{K}(t, t') = e^{-\alpha(t-t')}, \quad (16)$$

$$\psi(x, t, q', q'') = \beta V q'_x(x, t) - \theta K q''_{xx}(x, t). \quad (17)$$

Данный метод реализуется в виде следующей итерационной схемы:

$$q^{(v)}(t|x) = \varphi(t|x) - \int_0^t \tilde{K}(t, t') \cdot \psi(x, t', q^{(v-1)}(t'|x)) dt'. \quad (18)$$

Здесь x фиксировано и играет роль параметра, v – номер итерации. Для вычисления значений выражения $\psi(x, t, q(t|x))$ на множестве функций $q(t|x)$ необходима аппроксимация производных $q'_x(x, t)$ и $q''_{xx}(x, t)$. С этой целью введем равномерную сетку узлов $\{x_k\}$ на интервале $x \in [0; 1]$, $k = \overline{0, m}$. Шаг сетки при этом определяется так: $\Delta x = \frac{1}{m}$. Внутренние узлы сетки – $\{x_k\}$, $k = \overline{1, m-1}$. Внешние узлы сетки – $\{x_0 = 0\}$, $\{x_m = 1\}$. Далее будем полагать, что на каждом шаге итерации v вычисляется последовательность $q_k^{(v)}(t) = q^{(v)}(t|x_k)$, $k = \overline{0, m}$. Это позволяет для каждого v воспользоваться следующими конечно-разностными аппроксимациями для производных $q'_x(x, t)$ и $q''_{xx}(x, t)$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial q(t|x)}{\partial x} \right)^{(v)} &= \frac{q_k^{(v)}(t) - q_{k-1}^{(v)}(t)}{\Delta x}, \\ \left(\frac{\partial^2 q(t|x)}{\partial x^2} \right)^{(v)} &= \frac{q_{k+1}^{(v)}(t) - 2q_k^{(v)}(t) + q_{k-1}^{(v)}(t)}{\Delta x^2}, \end{aligned}$$

где $k = \overline{1, m-1}$. При этом $q_0^{(v)}(t) = q(t|x_0 = 0)$ и $q_m^{(v)}(t) = q(t|x_m = 1)$ определены граничными условиями для исходного уравнения (5). В итоге имеем формулу для расчета значений функции $\psi(x, t, q(x, t))$ в точке $x = x_k$:

$$\begin{aligned} \psi(x_k, t, q^{(v)}(t|x_k)) &= \beta \cdot V \cdot \frac{q^{(v)}(t|x_k) - q^{(v)}(t|x_{k-1})}{\Delta x} - \\ &- \theta \cdot K \cdot \frac{q^{(v)}(t|x_{k+1}) - 2q^{(v)}(t|x_k) + q^{(v)}(t|x_{k-1})}{\Delta x^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, вычислительный процесс для итерационной схемы (18) полностью определен и его результатом является последовательность функций $\{q_k^{(v)}(t)\}$, $v = 1, 2, \dots$, $k = \overline{1, m-1}$.

Вычислительный алгоритм качественной модели переноса примесей на основе итерационного метода. Приведем еще раз основные расчетные формулы метода:

$$\begin{aligned}
 q^{(v)}(t|x) &= \varphi(t|x) - \int_0^t \tilde{K}(t, t') \cdot \psi(x, t', q^{(v-1)}(t'|x)) dt', \\
 \varphi(t|x) &= q(0|x) \cdot e^{-\alpha t} + \int_0^t \xi \cdot e^{-\alpha(t-t')} \cdot S(t'|x) dt', \\
 \tilde{K}(t, t') &= e^{-\alpha(t-t')},
 \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
 \psi(x_k, t, q^{(v)}(t|x_k)) &= \beta V \cdot \frac{q^{(v)}(t|x_k) - q^{(v)}(t|x_{k-1})}{\Delta x} \\
 &\quad - \theta K \cdot \frac{q^{(v)}(t|x_{k+1}) - 2q^{(v)}(t|x_k) + q^{(v)}(t|x_{k-1})}{\Delta x^2}.
 \end{aligned}$$

Заменяем функции $q^{(v)}(t|x)$, $\tilde{K}(t, t')$, $\varphi(t|x)$ и $\psi(x_k, t, q^{(v)}(t|x_k))$ сеточными функциями $q^{(v)}(x_k, t_j) = q_{k,j}^{(v)}$, $\tilde{K}(t_i, t_j) = \tilde{K}_{i,j}$, $\varphi(x_k, t_j) = \varphi_{k,j}$ и $\psi^{(v)}(x_k, t_j) = \psi_{k,j}^{(v)}$, где (x_k, t_j) – внутренние узлы равномерной сетки $k = \overline{1, m-1}$, $j = \overline{1, n}$, $\Delta x = \frac{1}{m}$, $\Delta t = \frac{1}{n}$, $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$; $x_k = k \cdot \Delta x$, $k = \overline{0, m}$, $t_j = j \cdot \Delta t$, $j = \overline{0, n}$. Начальными условиями определяются значения $q^{(v)}(x_k, t_0 = 0)$, $k = \overline{0, m}$; граничными условиями задаются значения $q^{(v)}(x_0 = 0, t_j)$ и $q^{(v)}(x_m = 1, t_j)$, $j = \overline{0, n}$. Тогда выражения (20) получают следующее представление:

$$\tilde{K}(t_i, t_j) = \exp\{-\alpha(t_j - t_i)\} = \tilde{K}_{i,j}, \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi(x_k, t_j) &= q(x_k, t_0) \cdot \exp\{-\alpha t_j\} + \xi \cdot \sum_{i=0}^j \omega_i \cdot S(x_k, t_i) \cdot \tilde{K}(t_i, t_j) \cdot \Delta t = \\
 &= q_{k,0} \cdot \exp\{-\alpha t_j\} + \xi \cdot \sum_{i=0}^j \omega_i \cdot S_{k,i} \cdot \exp\{-\alpha(t_j - t_i)\} \cdot \Delta t = \varphi_{k,j},
 \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
 \psi^{(v-1)}(x_k, t_i) &= \beta V \cdot \frac{q^{(v-1)}(x_k, t_i) - q^{(v-1)}(x_{k-1}, t_i)}{\Delta x} \\
 &\quad - \theta K \cdot \frac{q^{(v-1)}(x_{k+1}, t_i) - 2q^{(v-1)}(x_k, t_i) + q^{(v-1)}(x_{k-1}, t_i)}{\Delta x^2} = \psi_{k,i}^{(v-1)}.
 \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
 q^{(v)}(x_k, t_j) &= \varphi(x_k, t_j) - \sum_{i=0}^j \omega_i \cdot \tilde{K}(t_i, t_j) \cdot \psi^{(v-1)}(x_k, t_i) \cdot \Delta t = \\
 &= \varphi_{k,j} - \sum_{i=0}^j \omega_i \cdot \exp\{-\alpha(t_j - t_i)\} \cdot \psi_{k,i}^{(v-1)} \cdot \Delta t = q_{k,j}^{(v)},
 \end{aligned} \tag{24}$$

где $v = 0, 1, 2, \dots$, $q_{k,j}^{(0)} = \varphi_{k,j}$, $k = \overline{1, m-1}$, $j = \overline{1, n}$, интегралы, входящие в выражения (20), приближенно заменены интегральными суммами с квадратурными коэффициентами $\{\omega_i\}$, $i = \overline{0, j}$, $j = \overline{1, n}$.

Преобразуем выражения (21) – (24) следующим образом:

$$\tilde{K}_{i,j} = \exp\{-\alpha(t_j - t_i)\}, \tag{25}$$

$$\varphi_{k,j} = q_{k,0} \cdot \exp\{-\alpha t_j\} + \xi \lambda \cdot \sum_{i=0}^j \omega_i \cdot S_{k,i} \cdot \exp\{-\alpha(t_j - t_i)\} \cdot \Delta x^2 = \varphi(\lambda), \tag{26}$$

$$\psi_{k,i}^{(v-1)} = \frac{1}{\Delta x^2} \cdot \beta V \cdot \Delta x \cdot (q_{k,i}^{(v-1)} - q_{k-1,i}^{(v-1)}) - \frac{1}{\Delta x^2} \theta K \cdot (q_{k+1,i}^{(v-1)} - 2q_{k,i}^{(v-1)} + q_{k-1,i}^{(v-1)}) = \frac{1}{\Delta x^2} \cdot \tilde{\psi}_{k,i}^{(v-1)}. \quad (27)$$

$$q_{k,j}^{(v)} = \varphi_{k,j} - \lambda \sum_{i=0}^j \omega_i \cdot \exp\{-\alpha(t_j - t_i)\} \cdot \tilde{\psi}_{k,i}^{(v-1)}. \quad (28)$$

Проверяется условие сходимости:

$$\rho < \varepsilon, \quad (29)$$

где

$$\rho = \frac{1}{n \cdot (m-1)} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n |q_{k,j}^{(v)} - q_{k,j}^{(v-1)}|, \quad (30)$$

если $\rho < \varepsilon$, то $\tilde{q}_{k,j} = q_{k,j}^{(v)}$, в противном случае $v = v + 1$. Сравнение полученного приближенного решения \tilde{q} с точным решением q_T (точное решение получается в «Блоке исходных данных» и считается в данном тестовом примере известным) выполняется по следующей формуле:

$$\sigma = \frac{1}{n \cdot (m-1)} \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n |(q_T)_{k,j} - \tilde{q}_{k,j}|. \quad (31)$$

Основное назначение данной модели – это возможность расчетно-аналитическим путем изучить влияние перечисленных выше параметров модели на пространственно-временную изменчивость поля концентрации загрязняющих веществ в условиях турбулентной диффузии. Важным здесь является то, что за каждым параметром модели стоит вполне определенный физический фактор, влияющий на формирование поля $q(x, t)$ в области Ω (в пределах локального объема среды). Конечно, модель носит сугубо приближенный характер, и в случае необходимости уточнить тот или иной результат следует обратиться к итерационной схеме (1) и найти второе приближение $q^{(2)}(x, t)$ включая при этом уже процедуры численного дифференцирования и интегрирования.

Результаты вычислений и численных исследований. Программная реализация вычислительного алгоритма, соответствующего описанному выше итерационному методу, проводилась при следующих значениях исходных данных: по заданным значениям $V_0 = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $K_0 = 70 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$,

$$q_0 = 0,001 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad S_0 = 0,0001 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}}, \quad \alpha = 0,1, \quad \beta = 0,1, \quad \theta = 0,001, \quad \lambda = 0,5, \quad \text{вычисляются значения}$$

$$\Delta x = 0,04, \quad \Delta t = 0,0008, \quad m = 25, \quad n = 100, \quad X = 700 \text{ м}, \quad T = 7 \text{ с}, \quad q_{\max} \approx 0,0001 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

$$S_{\max} \approx 0,00009 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}}. \quad \text{Обоснование выбора таких значений исходных данных приведено в работе}$$

[1]. При этом в работе использовались алгоритмы [2], позволяющие генерировать дискретные значения распределений, входящих в параметризованную модель переноса (1), включая и точные значения поля концентрации $q_T(x, t) = q^* \cdot \hat{q}(\hat{x}, \hat{t})$. В результате исходные данные представляются массивами дискретных значений $\{\hat{q}(k, j)\}$, $\{\hat{V}(k, j)\}$, $\{\hat{K}(k, j)\}$, $\{\hat{S}(k, j)\}$ и $\{\hat{x}(k)\}$, $\{\hat{t}(j)\}$, $k = \overline{0, m}$, $j = \overline{0, n}$, нормированных на максимальный элемент каждого из них соответственно. Ниже приводятся результаты расчетов в виде следующих массивов – массив $q = \{q_{k,j}\}$, $k = \overline{0, m, 5}$, $j = \overline{0, n, 20}$, который представляет собой точное решение уравнения переноса:

$$q = \begin{pmatrix} 0.0104 & 0.0106 & 0.0107 & 0.0109 & 0.0111 & 0.0112 \\ 0.0274 & 0.0278 & 0.0283 & 0.0287 & 0.0291 & 0.0296 \\ 0.0854 & 0.0533 & 0.0541 & 0.0549 & 0.0557 & 0.0565 \\ 0.1261 & 0.0868 & 0.0881 & 0.0895 & 0.0908 & 0.0921 \\ 0.1469 & 0.1282 & 0.1302 & 0.1321 & 0.1341 & 0.1360 \\ 0.1745 & 0.1773 & 0.1801 & 0.1828 & 0.1855 & 0.1882 \end{pmatrix}$$

и массив $\tilde{q} = \{\tilde{q}_{k,j}\}$, $k = \overline{0, m, 5}$, $j = \overline{0, n, 20}$, полученный в результате расчетов, проводимых по итерационному алгоритму (25) – (28):

$$\tilde{q} = \begin{pmatrix} 0.0104 & 0.0106 & 0.0107 & 0.0109 & 0.0111 & 0.0112 \\ 0.0274 & 0.0155 & 0.0157 & 0.0159 & 0.0161 & 0.0296 \\ 0.0854 & 0.0173 & 0.0176 & 0.0178 & 0.0181 & 0.0565 \\ 0.1261 & 0.0192 & 0.0194 & 0.0198 & 0.0200 & 0.0921 \\ 0.1469 & 0.0211 & 0.0211 & 0.0216 & 0.0219 & 0.1360 \\ 0.1745 & 0.0166 & 0.0168 & 0.0171 & 0.0173 & 0.1882 \end{pmatrix}$$

Графическое представление данных распределений приведено на рис. 1 и 2 соответственно.

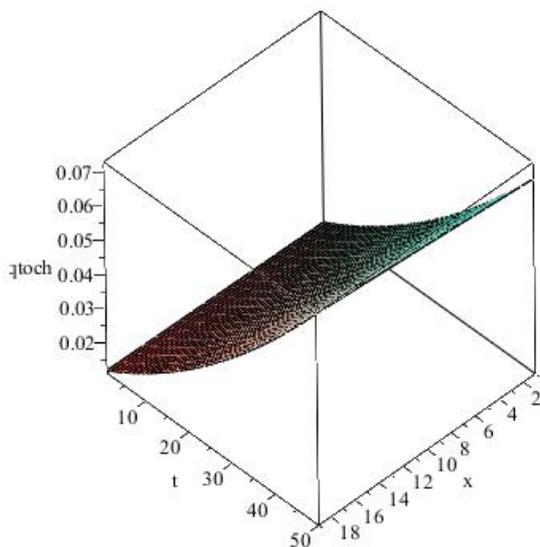


Рис. 1. Пространственно-временное распределение точного решения \tilde{q}_{toch} в нормированном виде

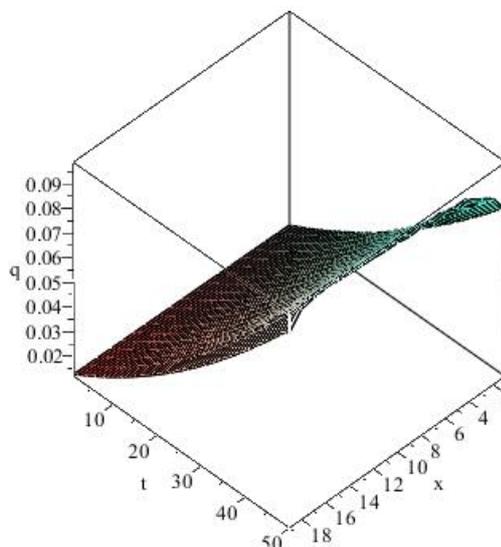


Рис. 2. Пространственно-временное распределение приближенного решения \tilde{q} в нормированном виде

Таблица 1

Результаты исследования скорости сходимости итерационного метода
(размерность задачи составила $m \times n = 25 \times 100$)

ε	ν	ρ	σ
0,00500	1	0,0010775	0,0020812
0,00100	18	0,0009539	0,0021133
0,00050	20	0,0003631	0,0021129
0,00025	21	0,0002141	0,0021127
0,00010	23	0,0000685	0,0021127

Результаты численного исследования скорости сходимости данного качественного метода приведены в таблице 1, анализ которых показывает, что представленный в работе итерационный метод при выбранных исходных данных обладает не очень высокой скоростью сходимости. Однако это не уменьшает его значимости, поскольку приближенное качественное решение \tilde{q} , полученное в результате проведенных расчетов, может быть использовано в виде исходных данных в работе других более точных алгоритмов.

Литература

1. Наац В. И., Наац И. Э. Математические модели и численные методы в задачах экологического мониторинга атмосферы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 328 с.
2. Наац В. И., Ярцева Е. П. Численное исследование рекурсивных и итерационных алгоритмов в задаче моделирования переноса аэрозолей в атмосфере // Вестник Ставропольского государственного университета. 2011. Вып. 75 [4]. С. 44–50.
3. Ярцева Е. П., Наац В. И. Итерационный метод численного решения уравнения переноса примесей в атмосфере // «Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий»: материалы VI Всероссийской открытой научно-практической конференции. Сочи, 2010. С. 178–180.

УДК 519.5, 519.6

Наац Игорь Эдуардович, Артемов Сергей Владимирович

ИТЕРАЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА НА ОСНОВЕ ОПЕРАТОРОВ ОБОБЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Излагается новый подход к построению оператора обобщенного дифференцирования и разработке на его основе итерационного алгоритма для модели переноса субстанции в атмосфере.

Ключевые слова: оператор обобщенного дифференцирования, уравнение переноса субстанции, итерационный алгоритм.

Naac Igor Eduardovich, Artemov Sergey Vladimirovich

ITERATIVE ALGORITHMS FOR NUMERICAL SOLUTION OF TRANSFER BASED GENERALIZED DIFFERENTIAL OPERATORS

The new approach to construction of the operator of generalized differentiation and development on the basis of the iterative algorithm for the model of substance transport in the atmosphere.

Key words: generalized differentiation operator, the equation of transfer of substance, an iterative algorithm.

Представленная работа продолжает исследование авторов по разработке численных методов и программного обеспечения информационно-измерительных систем оперативного прогноза пространственно-временной изменчивости поля концентрации загрязняющих веществ в пограничном слое атмосферы [1, 2, 3]. Построение соответствующих алгоритмов во многом связано с приближенными решениями уравнения переноса субстанции в атмосфере, которое в простейшем виде записывается так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha(t) \cdot u = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (V(x, t) \cdot u) + S(x, t), \quad (1)$$

где функции $V(x, t)$, $K(x, t)$, $\alpha(t)$ и $S(x, t)$, определенные в области $\Omega = \Omega_x \times \Omega_t = [a, b] \times [t_0, T]$, считаются заданными, а $u(x, t)$ – концентрация контролируемой субстанции – подлежит определению.

Особенностью задач мониторинга реальных сред и прогнозирования пространственно-временной изменчивости их характеристик является необходимость привлечения в той или иной форме эмпирических данных, и так называемых «полуэмпирических» формул, описывающих приближенно возможные функциональные зависимости между указанными выше функциями. В частности, в случае диффузного переноса (1) вполне могут быть использованы зависимости между значе-