

УДК 519.5

Наац Игорь Эдуардович, Наац Виктория Игоревна

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МОДЕЛИ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ПРИМЕСЕЙ В АТМОСФЕРЕ С ПРИБЛИЖЕННЫМИ ДАННЫМИ

В статье рассматривается нестационарное уравнение переноса примесей в атмосфере, в которой предполагается использование эмпирических данных. На основе интегральных представлений функций выполняется построение соответствующего рекурсивного алгоритма.

Ключевые слова: нестационарное уравнение переноса примесей в атмосфере, рекурсивный вычислительный алгоритм, сингулярные интегралы, численные исследования.

Naath Igor E., Naath Viktoria I.

INTEGRATED REPRESENTATIONS OF FUNCTIONS IN CALCULATION MODEL OF COEFFICIENT PROBLEM FOR EQUATION OF THE POLLUTANTS TRANSFER IN THE ATMOSPHERE, WHICH INVOLVES THE USE OF EMPIRICAL DATA

The non-stationary equation of transfer of impurity in the atmosphere is considered, which involves the use of empirical data. Construction of the corresponding recursive algorithm is performed on the basis of the functions represented in singular integrals.

Key words: non-stationary equation transfer of impurity in the atmosphere, a recursive computing algorithm, singular integrals, numerical researches.

В ранее представленных работах авторов [1,2], посвященных созданию средств математической и алгоритмической поддержки методик прогнозирования экологических состояний системы «атмосфера –подстилающая поверхность», в исходные математические модели вводились так называемые операторы обобщенного дифференцирования, адекватно учитывающие дефицит исходных данных, их приближенный характер. В пределах настоящей работы осуществляется дальнейшее развитие этого подхода применительно к задачам моделирования явления диффузного переноса загрязняющих веществ в атмосфере и разработке соответствующих численных методов оценки и прогноза пространственно-временной изменчивости поля концентрации примесей.

Обратимся к тем математическим моделям, которые могут быть положены в основу оперативного контроля пространственно-временной изменчивости поля концентрации загрязняющих веществ. Если рассмотреть процесс переноса субстанции в турбулентной среде, скажем, в направлении координатной оси $\vec{Ox}$, то уравнение переноса относительно функции $u(x,t)$, описывающей поле концентрации в точке (x,t) , где $x \in \Omega_x = [a,b]$ и $t \in \Omega_t = [0,T]$ может быть записано в виде [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}(V_x u)(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + S(x,t), \quad (1)$$

где $V_x(x,t)$ и $K(x,t)$ исходные данные, характеризующие поле скорости ветра в направлении оси $\vec{Ox}$ и коэффициент турбулентной диффузии. Функция $S(x,t)$ описывает источник возможных загрязнений в пределах области $\Omega = \Omega_x \times \Omega_t$. В случае трехмерных полей уравнение (1) примет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (V_j(P,t)u) = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K(P,t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + S(P,t), \quad (2)$$

где $P = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega_x \subset R_3$. Поскольку в данном случае исходное функциональное уравнение, связывающее неизвестную функцию $u(P, t)$ с заданными полями $\vec{V} = (V_1, V_2, V_3)$, $K(P, t)$ и $S(P, t)$ представлено в форме дифференциального уравнения, то требуется задать начальные и граничные значения для искомой функции. Особенностью решаемой задачи является то обстоятельство, что если поле скорости ветра в принципе измеряемо в пределах области Ω_x , то поле коэффициента турбулентной диффузии $K(P, t)$ остается неизвестным и судить о его значениях можно, лишь на основании некоторых априорных допущений. Для этого могут быть использованы приближенные полуэмпирические формулы [1,3], которые естественно не дают возможности оценить значения градиента $\nabla K(P, t)$, необходимые в модели (2) и требующие применения операции дифференцирования. В этом случае операция дифференцирования в математическом отношении является некорректной и ведет в конечном итоге к неустойчивости вычислительных алгоритмов. Наличие неопределенностей в исходных математических моделях накладывает ограничения на использование известных стандартных методов численного решения уравнения (2), и требует иных подходов, касающихся как содержательной стороны решаемой задачи, так и построения надлежащего аналитического аппарата. Здесь в большей мере определение функции $u(P, t)$ следует понимать не как задачу формального численного решения дифференциального уравнения параболического типа, а скорее как задачу «конструирования» поля $u(P, t)$ по представленным приближенным данным и приемлемым априорным допущениям. Упомянутый выше термин «конструирование» функции (более точно конструирование функциональной зависимости) в содержательном смысле близок тому, как он понимается в монографии И. П. Натансона [4]. Помимо этого уместно сослаться также на монографию К. Ланцоша [5], в которой излагаются методы и концепции прикладного анализа.

Как уже отмечалось ранее в работах авторов, при наличии неопределенностей в исходных данных для краевых задач предпочтительно задачу (1) с начальными и краевыми условиями формулировать в параметризованном виде [1]. Например, уравнение (1) может быть представлено в этом случае следующим выражением:

$$\frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} = \beta \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left(\tilde{K}(\tilde{x}, \tilde{t}) \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}} \right) - \gamma \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} (\tilde{V}_x(\tilde{x}, \tilde{t}) u) + \tilde{S}(\tilde{x}, \tilde{t}), \quad (3)$$

где $\tilde{t} = t/T$, $(0 \leq \tilde{t} \leq 1)$, $\tilde{x} = (x-a)/(b-a)$, $(0 \leq \tilde{x} \leq 1)$, $\beta = (K_{\max} \cdot T)/L_x^2$, $\gamma = (V_{\max} \cdot T)/L_x$, $L_x = b-a$, $\tilde{S} = TS$, $\tilde{K}(\tilde{x}, \tilde{t}) = K(\tilde{x}, \tilde{t})/K_{\max}$, $\tilde{V}_x(\tilde{x}, \tilde{t}) = V_x(\tilde{x}, \tilde{t})/V_{\max}$. Задачу решения уравнения (3) можно рассматривать как состоящую из двух этапов, а именно, построение решающего алгоритма как некоторого «генератора» функции $u(\tilde{x}, \tilde{t}, \beta, \gamma)$ для каждой пары параметров $(\beta, \gamma) \in \Gamma$ и точки $(\tilde{V}, \tilde{K})$ из множества возможных данных $B = \{(\tilde{V}, \tilde{K}) : 0 < \tilde{V} < V_{\max}, 0 < \tilde{K} < K_{\max}\}$ и последующей надлежащий (наилучшим образом) выбор точки (β^*, γ^*) . Конечно, подобный подход в целом носит качественный характер, что вполне приемлемо для задач с приближенными данными. Аналогично записывается параметризованная форма пространственной модели переноса (2):

$$\frac{\partial u}{\partial \tilde{t}}(\tilde{P}, \tilde{t}) = \beta \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \left(\tilde{K}(\tilde{P}, \tilde{t}) \frac{\partial u}{\partial \tilde{x}_j} \right) - \gamma \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} (\tilde{V}_j(\tilde{P}, \tilde{t}) u) + \tilde{S}(\tilde{P}, \tilde{t}). \quad (4)$$

В дальнейшем символ «~» в подобных выражениях в целях упрощения записи будет опускаться.

Заметим, что принцип поточечного соответствия значений функции и ее аргумента для приближенных данных не в полной мере правомерен в строгом смысле, и потому можно внести в модель (4) некоторые упрощения, вполне приемлемые с практической точки зрения. Это, прежде всего, касается поля коэффициента турбулентной диффузии $K(P, t)$. В частности, примем допущение для первого члена в (4), отвечающего за явление турбулентного рассеяния в данной модели переноса:

$$\sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K(P,t) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \approx \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = \sum_{i,j=1}^3 K_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (5)$$

Введением условия (5) предлагается турбулентное рассеяние переносимой субстанции описывать с помощью матрицы $\{K_{ij}\}_{3 \times 3}$, элементы которой удовлетворяют условию $0 \leq K_{ij} \leq 1$, они ассоциированы с областью Ω и множеством исходных данных $B = \{(V, K)\}$. Элементы K_{ij} могут интерпретироваться как коэффициенты турбулентного обмена субстанции в процессе ее переноса в турбулентной среде между направлениями $\vec{Ox}$ и $\vec{Ox}_j$, $j = 1, 2, 3$, для одномерной и пространственной задач соответственно. В связи с этим уравнение (4) при условии (5) можно считать «полуэмпирическим» уравнением турбулентного переноса субстанции. Упомянутый выше выбор параметров β и γ позволяет наилучшим образом указать приемлемые соотношения между адвективной и конвективной составляющими в искомом поле $u(P, t, \beta, \gamma)$ в целом по области Ω при данном множестве B . Относительно последнего необходимо заметить, что поскольку его элементы суть приближенно заданные функции $\vec{V}_\sigma$ и K_σ , т. е. являются так называемыми σ -приближениями, то далее будем писать $B_\sigma = \{(\vec{V}_\sigma, K_\sigma)\}$. Это замечание важно в понимании подходов к оценке параметров моделей, которые будут излагаться ниже.

Если функция $u(P, t)$ представлена своим σ -приближением $u_\sigma(P, t)$, таким что $\|u(P, t) - u_\sigma(P, t)\|_{L_1(\Omega)} \leq \sigma \|u(P, t)\|_{L_1(\Omega)}$, то далее вполне естественным будет использовать те или иные ее представления в виде интегралов при аналитическом конструировании этой функции в рамках аппроксимационного подхода. Напомним, что альтернативными представлениями при исследовании функции являются ряды, которые вполне эффективно приближают дифференцируемые функции. Ниже в рассматриваемой задаче используем следующие соотношения:

$$\begin{cases} \int_{\Omega_q} W_n(P, P', t) u(P', t) d\Omega(P') = (W_n u)(P, t) = u_n(P, t) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(P, t) = u(P, t) \end{cases}. \quad (6)$$

В этом подходе искомая функция $u(P, t)$ в каждой точке $(P, t) \in \Omega$ рассматривается как предельный элемент последовательности $\{u_n(P, t)\}$, порождаемой последовательностью интегральных операторов $\{W_n\}$, определенных на множестве $C_\Sigma(\Omega)$. Подробное изложение техники аппроксимации в рамках аппарата (6) и его применение для уравнений параболического типа дано в работе [2].

Если исследуемая функция представлена системой дискретных значений, ассоциированных с узлами для переменной x_i ($x_i \in [0, 1]$), то интеграл в (6) с помощью подходящей квадратурной формулы представляется суммационным аналогом вида:

$$S_{n,m}(x, t; u) = \sum_{i=1}^n \omega_i h W_n(x, x_i; t) u(x_i, t), \quad (7)$$

где ω_i – соответствующие квадратурные коэффициенты и $h = 1/m$ – шаг дискретизации по переменной $x_i \in [0, 1]$. Выражение (7) соответствует тому, что в теории приближения функций называется обобщенным полиномом функции степени m . Исходя из (6) нетрудно показать справедливость следующего предельного равенства: $\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} \|U(x, t) - S_{n,m}(x, t, u)\|_{L_1(\Omega)} = 0$

почти всюду на Ω_x , если $u \in L_1(\Omega_x)$. Процессы $m \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$ должны быть взаимно согласованы [2].

Особенностью изложенного подхода к проблеме аппроксимации исследуемых функций (поиску решений функциональных уравнений) является то, что представление (6) применимо не только к функции $u(P, t)$ но и к ее частным производным любого порядка. В частности имеем аналогичные соотношения:

$$\begin{cases} \int_{\Omega_q} W_n(P, P', t) u'_{x_i}(P', t) d\Omega(P') = (W_n D_{x_i}^{(1)} u)(x, t) = (u'_{x_i})_n(P, t) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (u'_{x_i})_n(P, t) = u'_{x_i}(P, t) \end{cases} \quad (8)$$

Применив к интегралу (8) формулу интегрирования по частям, найдем:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_q} W_n(P, P', t) u'_{x_i}(P', t) d\Omega(P') = \\ = \int_{\Omega_q} W'_{n, x_i}(P, P') u(P', t) d\Omega(P') + \psi_{n, 1}^{(i)}(P, t; \bar{u}), \end{aligned} \quad (9)$$

где $\psi_{n, 1}^{(i)}(P, t; \bar{u})$ – соответствующий интеграл по границе области Ω_x , т.е. по $\bar{\Omega}_x$ от функции $(W_n(P, P', t) u'(P', t))$, ($P' \in \bar{\Omega}_x$) и $W'_{n, x_i} = (W'_{x_i})_n$. Заметим, что $\psi_{n, 1}^{(i)}(P, t; \bar{u}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для $\forall P \in \bar{\Omega}_x$ и $\psi_{n, 1}^{(i)}(P, t; \bar{u}) \equiv 0$ при $\bar{u} \equiv 0$ на $\bar{\Omega}_x$. В этих условиях соотношения (8) и (9) определяют преобразование $u(P, t) \rightarrow u'_{x_i}(P, t)$ в точке $(P, t) \in \Omega$, осуществляемое интегральным оператором $(D_i^{(1)} \circ W_n)$ с ядром $W'_{n, x_i}(P, P', t)$ при $n \rightarrow \infty$. Аналогично строится и преобразование $u(P, t) \rightarrow u''_{x_i x_i}(P, t)$, определяемое интегральным оператором $(D_i^{(2)} \circ W_n)$ с ядром $W''_{n, x_i x_i}(P, P', t)$. Для большей ясности приводимых здесь интегральных формул (8) и (9) заметим, что ядра $W_n(P, P', t)$ удовлетворяют условиям

$$W_n(P, P', t) = W_n(|\vec{r}(P) - \vec{r}(P')|, t) \rightarrow 0$$

при

$$|\vec{r}(P) - \vec{r}(P')| \rightarrow \infty \text{ и } W_n(P, P', t) \geq 0$$

всюду в области своего определения, где $\vec{r}(P)$ радиус-вектор точки P . Следствием этого является соотношение $(W'_{x_i})_n = (-W'_{x_i})_n$, которое и использовалось выше при записи (9).

Применяя изложенные выше принципы аппроксимации функции и их производных, исходную модель (4) можно представить в виде:

$$\dot{u}(P, t) = \beta A_n u - \gamma B_n u + \bar{S}, \quad (10)$$

где A_n и B_n – интегральные линейные операторы с ядрами:

$$A_n(P, P', t) = \sum_{i, j=1}^3 K_{ij} (D_{ij}^{(2)} \circ W_n)(P, P', t),$$

и

$$B_n(P, P', t) = \sum_{i, j=1}^3 (D_i^{(1)} \circ W_n)(P, P', t).$$

В дальнейшем будем иметь (10) в виде:

$$\dot{u}(P, t) = -\beta(Q_n u)(P, t) + \bar{S}(P, t), \quad (11)$$

где $Q_n = -A_n + \eta B_n$, $\eta = \beta/\gamma = K_{\max}/\alpha_x V_{\max}$.

Выражение (11) определяет некую стандартную аналитическую форму представления тех функциональных уравнений, которые получили название уравнений эволюционного типа. В нашем случае их особенностью является то обстоятельство, что в правой части стоит интегральный оператор по пространственным переменным. Последний, как нетрудно показать, является ограниченным в области Ω_x и вполне непрерывным почти всюду в ней. Поскольку он определен на множестве функций, суммируемых на Ω_x , то никаких ограничений на гладкость искомых функций в Ω_x не требуется. Это обстоятельство является весьма важным, если при решении уравнения типа (4) используются приближенные данные.

Построение конкретной вычислительной схемы для эволюционных уравнений (10) может быть осуществлено различными способами [1]. Для целей характеристики уравнения (10) будем использовать следующую рекурсивную схему (схема линейного прогноза):

$$u(P, t_{j+1}) = -\beta(T_{n,j}u)(P, t_j) + \tau(S_{n,j}\bar{S})(P, t_j), \quad (12)$$

$$T_{n,j} = (I + \tau\eta Q_{n,j})^{-1}(I - \tau\eta Q_{n,j}), \quad (13)$$

$$S_{n,j} = (I + \tau\eta Q_{n,j})^{-1}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Оператор (13) называется оператором шага, а второй оператор (14) – оператором источника, при этом $\tau = (t_{j+1} - t_j)$ – интервал дискретизации по временной переменной $t \in \Omega_t$. Сходимость рекурсивной схемы (12) при $\tau \rightarrow 0$ требует выполнения условия $\beta \|T_{n,j}\| < 1$ для $\forall j, n$. Ясно, что выполнение этого условия требует соответствующего подбора параметров вычислительной схемы, а именно, выбора значений величин β, γ, τ и n . В связи с этим можно говорить о последовательности приближенных решений $\{u_n(P, t_j, \rho)\}$, где ρ – точка соответствующего параметрического пространства P . Если выбор пары (n, τ) более или менее ясен в том смысле, что его можно связать с допустимой гладкостью на приближенные решения $\{u_n(P, t)\}$ и устойчивостью вычислительного алгоритма, то неопределенность решаемой задачи, обусловленная отсутствием априорной информации о матрице $K = \{K_{ij}\}$ более существенна. По существу речь идет о «привязке» исходной математической модели к реальной ситуации посредством адекватного выбора характеристик среды в пределах пространственно-временной области $\Omega = \Omega_x \times \Omega_t$. Напомним, что в рассматриваемом случае речь идет о прикладной системе атмосфера – подстилающая поверхность (пограничный слой атмосферы). В ранее опубликованной работе авторов, связанной с разработкой математического обеспечения экологического мониторинга природной среды [1], предполагалось наличие в контролируемом районе экологических постов, обеспечивающих контроль уровня загрязнений в выбранных точках P_ν , $\nu = 1, 2, \dots, N$ в момент t_j . Используя данные мониторинга $\{u_\sigma(P_\nu, t_j)\}$, можно упомянутую выше «привязку» модели осуществить на основе численных методов оптимальной аппроксимации. Действительно, если заданы матрица U_σ эмпирических значений поля концентрации контролируемой субстанции для пар $\{u_\sigma(P_\nu, t_j)\}$ с одной стороны, и параметризованное семейство возможных решений $\{u_n(P, t; K, \rho)\}$ для схемы (12), то можно определить следующий функционал:

$$\begin{aligned} T_\alpha(u_\sigma, u_n(K, \rho)) = & \|u_\sigma - u_n(P, t; K, \rho)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \\ & + \alpha \|\tilde{\nabla}_\alpha u_n(Ku, \rho)\|_{L_2(\Omega)}^2 = T_{\alpha(\sigma)}(K), \quad (\alpha > 0), \end{aligned} \quad (15)$$

определенный для каждой пары (n, ρ) на множестве Φ , элементами которого являются матрицы коэффициентов турбулентного обмена K . В связи с этим, помимо выбора формальных параметров модели (n, ρ) , заключительной операцией «конструирования» поля $u(P, t)$ является решение оптимизационной задачи: $\inf_{K \in \Phi} T_{\alpha(\sigma)}(K) = T_{\alpha(\sigma)}(K^*)$. Ясно, что значение $T_{\alpha(\sigma)}(K^*)$, характеризующее степень уклонения значений $u_n(P, t, \rho)$ от эмпирически наблюдаемого дискретного

множества значений $\{u_\sigma\}$, должно быть достаточно малым, т.е. сравнимым со значением ошибки измерений контрольных значений σ . Параметры n и $\rho = (\tau, \beta, \gamma)$ позволяют в определенной степени осуществить коррекцию окончательных значений $T_{\alpha(\sigma)}^* = T_{\alpha(\sigma)}(K^*)$. Нетрудно видеть, что изложенный здесь вычислительный алгоритм по существу решает так называемую обратную коэффициентную задачу для уравнения турбулентного переноса (2). Введение в модель интегральных операторов, связанных с аналитическим представлением возможных решений, позволяет свести решение обратной коэффициентной задачи к методам обобщенной инверсии интегральных операторов, к каковым относится операция минимизации сглаживающего функционала (15), определенного на множестве приближенных данных.

Заключительные замечания будут касаться вычисления градиента $\tilde{\nabla}_\alpha$ на множестве приближенных решений рекурсии (12). Для большей ясности будем рассматривать одномерный вариант аппроксимационной задачи (6), в которой исследуемая функция $u(x, t)$ представляется интегралом с ядром $W_n(x, x', t)$, что записывается соотношением:

$$u(x, t) \approx \int_{\Omega_x} W_n(x, x', t) u(x', t) dx' = (W_n u)(x, t). \quad (16)$$

Будем для простоты рассматривать некоторую функцию $f(x)$, где $x \in \Omega_x$ и $f(x) \in C_\Sigma(\Omega_x)$. Поскольку $f(x)$ интегрируема по предположению, то ей можно в каждой точке x отрезка Ω_x поставить в соответствие неопределенный интеграл $F(x, f) = \int_0^x f(x') dx'$. Введем в рассмотрение следующий оператор:

$$(D_h F)(x) = \frac{F(x+h, f) - F(x-h, f)}{2h}. \quad (17)$$

Если функция $f(x)$ всюду непрерывна на Ω_x , то $F(x, f)$ дифференцируема, и значит определено предельное соотношение $\lim_{h \rightarrow 0} (D_h F)(x) = (DF)(x) = F'(x) = f(x)$. В последнем соотношении через D обозначен оператор обычного дифференцирования, определенный в анализе через предельное отношение $[f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)]/2\Delta x$ при $\Delta x \rightarrow 0$. В интеграле (16) ядро имеет особенности вблизи диагонали $x' = x$, и потому предположение о непрерывности интегрального выражения во всех точках отрезка Ω_x уже не может быть принято безоговорочно. Напомним, что если $f \in C_\Sigma(\Omega_x)$, то соответствующий неопределенный интеграл $F(x, f)$ будет функцией абсолютно непрерывной на Ω_x , для которой оператор D не может быть применен к ней во всех без исключения точках x . В этой ситуации разумно ввести оператор обобщенного дифференцирования в соответствии с формулой:

$$(\tilde{D}_\alpha F)(x) = \sup_{0 < |h| < \alpha} \frac{F(x+h, f) - F(x-h, f)}{2h},$$

где α – достаточно малая величина ($\alpha > 0$). В рассматриваемой задаче выше уже вводилась подобная величина. Речь идет о параметре регуляризации в оптимизационной задаче для функционала $T_\alpha(u_\sigma, u_n)$ (15). Выбор значений этой величины поставлен в зависимость от погрешности данных, используемых в задаче. Поскольку $(D_n F)(x) = (1/2h) \Delta_h F(x)$ согласно (17), то имеем представление для частной производной $u(x, t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \approx \frac{1}{2h} \int_{\Omega_x} (\Delta_h W_n)(x, x', t) u(x', t) dx'. \quad (18)$$

Для типовых ядер $W_n(x, x', t)$ сингулярных интегралов функций имеет место следующая оценка параметр $h \cong c\sqrt{\sigma/n}$, где σ – относительная ошибка значений u_σ исследуемой функции и n – порядок ядра в интеграле (16). В соответствии с (16) операция дифференцирования $u(x, t)$ выполняется численно путем вычисления интеграла с помощью стандартного программного обеспечения.

Литература

1. Наац В. И., Наац И. Э. Математические модели и численные методы в задачах экологического мониторинга атмосферы: Монография. М.: Физматлит, 2010.
2. Рыскаленко Р. А., Черкасова И. В. Интегральные представления функций в численных методах решения нестационарных задач переноса. Вестник Северо-Кавказского Федерального Университета (СКФУ). № 1 (34). Ставрополь, 2013. С. 30–34.
3. Лайтхман Д. Л. Физика пограничного слоя атмосферы. Л., 1970.
4. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М.: Физматлит, 1949.
5. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М.: Физматлит, 1961.