

УДК 519.248

Малофей Олег Павлович, Роженко Ольга Дмитриевна,  
Мирзоян Марине Вагановна

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПРИ ВЫБОРЕ РЕШАЮЩИХ ПРАВИЛ В СИСТЕМАХ С РАДИОКАНАЛАМИ НИЗКОГО КАЧЕСТВА

*В статье рассмотрено использование методов теории вероятностей для оценки эффективности декодирования кодов с повторением при передаче информации по симплексным радиоканалам пониженного качества с различным характером ошибок. Показано преимущество использования расширенного набора решающих правил неполного декодирования кодов с повторением, подтвержденное результатами имитационного моделирования на записях реальных каналов связи.*

*Ключевые слова: теория вероятностей, декодирование кодов с повторением, радиоканалы, имитационное моделирование.*

**Malofey Oleg P., Rozhenko Olga D., Mirzoyan Marina V.**

### THE USE OF PROBABILITY THEORY AT THE CHOICE OF DECISION RULES IN SYSTEMS WITH LOW QUALITY RADIO CHANNELS

*Examined the use of probability theory to increase the efficiency of decoding codes with repetition in transmitting information over the simplex radio channels degraded to the different nature of errors. The advantage of using an expanded set of decision rules partial decoding of codes with repetition was performed, which confirmed the results of the simulation on the records of real communication channels.*

*Key words: probability theory, decoding codes with repetition, radio channels, simulation modeling.*

При разработке системы передачи данных (СПД) по радиоканалам необходимо учитывать, что характер ошибок в дискретном канале СПД меняется при переходе от радиоканала одного вида к другому и во времени [1]. Поэтому метод повышения достоверности должен обеспечивать требуемую эффективность на каналах с разнообразным характером ошибок. Коды с повторением (КП) обладают большой корректирующей способностью, которая достигается введением значительной избыточности, и, следовательно, низкой относительной скоростью передачи. Но простота технической реализации декодеров КП (ДКП) способствовала широкому использованию КП в СПД по радиоканалам различного назначения [2, 3, 4].

Рассмотрим только двоичные коды с повторением всей кодовой комбинации и «жестким» решением демодулятора. Сущность «жесткого» декодирования КП заключается в подсчете числа поступивших по симплексным радиоканалам единиц и нулей, соответствующих конкретному элементу кодовой комбинации, и принятии решения о его значении или отказе от принятия такого решения. Пусть  $X_1 X_2$  – последовательно передаваемые по каналу связи повторы сообщения  $\{X\}$ . Мажоритарное решающее правило (РП) ДКП  $f_i(\alpha; x_{i1}, \dots, x_{ik})$  характеризуется количеством повторов  $k$ , участвующих в голосовании по большинству, номерами этих повторов  $i1, \dots, ik$  и критерием принятия решения  $\alpha$  из  $k$ . В случае полного РП устанавливается значение элемента повтора, а в случае неполного РП возможен отказ от декодирования. В дальнейшем рассматриваем только полные РП для нечетного числа повторов  $k$  и  $\alpha = (k + 1) / 2$ . Основные характеристики ДКП:  $P_c$  – вероятность безошибочного приема сообщения;  $P_{отк}$  – вероятность отказа от декодирования;  $t_d$  – распределение времени доведения сообщения;  $\Pi$  – объем буферной памяти декодера. Как правило, в применяемых ДКП реализуется небольшое число РП. Такой декодер имеет следующие недостатки: высокая достоверность достигается увеличением количества повторов сообщения, что повышает время доведения и объем буферной памяти;

не используются все возможности исправления ошибок в КП, а также особенности потока ошибок дискретного канала; в ДКП с одним РП время доведения не зависит от качества канала связи.

Некоторые из этих недостатков могут быть в значительной степени устранены при реализации ДКП с большим числом РП. Кроме того, соответствующий выбор множества РП  $F = \{f\}$  позволяет работать с переменным числом повторов сообщения, что дает дополнительные возможности по адаптации системы радиосвязи.

Пусть ДКП реализует множество РП

$$F = \{f_1, \dots, f_s\} = \bigcup_{i=1}^d F_i = \bigcup_{i=1}^d \{f_1, \dots, f_s\}_i$$

Тогда

$$P_c(F) = \sum_{j=1}^s Q_{f_j} | \bar{f}_1 \dots \bar{f}_{j-1}; \tag{1}$$

$$P(t_d \leq kt_n) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{s_i} Q_{f_{ij}} | \bar{f}_{i1} \dots \bar{f}_{is_{i-1}} \bar{f}_{i1} \dots \bar{f}_{ij-1}; \tag{2}$$

$$\Pi(F) \geq \max_{f_i \in F} \Pi(f_i), \tag{3}$$

где  $Q_{f_j} | \bar{f}_1 \dots \bar{f}_{j-1}$  – вероятность исправления всех ошибок в сообщении после приема  $k$  повторов и использования РП  $f_j$  при условии, что оно не было принято ранее после применения РП  $f_1 \dots f_{j-1}$ ;

$t_n$  – время передачи одного повтора сообщения;

$F_i$  – множество РП, используемых после приема повтора  $X_i$ ;

$\Pi(f_i)$  – объем буферной памяти, необходимый для реализации одного РП  $f_i$ .

При выборе структуры ДКП с несколькими РП возникают следующие задачи: определить, какое приращение  $P_c$  может быть достигнуто при заданном количестве повторов благодаря использованию другого множества РП  $F$  на радиоканалах с различным характером ошибок; найти объем буферной памяти декодера для реализации заданного множества РП; установить все множества РП, которые можно реализовать при заданном объеме буферной памяти декодера; выбрать оптимальное соотношение между объемом буферной памяти  $\Pi$ ,  $P_c$  и соответствующими характеристиками времени доведения  $t_d$ ; задать порядок применения РП  $f_i \in F$ .

Рассмотрим только первую задачу. Расчет основного показателя эффективности ДКП для любого потока, ошибок и произвольного набора РП  $F$   $P_c(F)$  в принципе можно произвести по формуле (1). Однако ее вид достаточно сложен при наличии пересекающихся РП, т. е. имеющих общие повторы. Если поток ошибок дискретного канала биномиальный и все ошибки мажоритарного декодирования обнаруживаются, то  $P_c(F)$  не зависит от конкретных номеров повторов в РП, а только от их количества в каждом РП и характера их пересечения множеств РП. Но в этом случае вид формулы достаточно сложен.

Пусть

$$F = \{f_1, \dots, f_s\}; f_1 = \{r; X_{11}, \dots, X_{12r-1}\}; f_2 = \{k; X_{21}, \dots, X_{22r-1}\}.$$

Для определенности  $k \geq r$ . Пусть общим для РП  $f_1, f_2$  являются  $s$  повторов  $0 \leq s \leq 2r - 1$ .

Тогда

$$P_c(F) = Q_{f_1} + Q_{f_2} | \bar{f}_1 \tag{4}$$

$$Q_{f_1} = \left[ 1 - \sum_{i=r}^{2r-1} C_{2r-1}^i P_0^i (1 - P_0)^{2r-1-i} \right]^n, \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{f_i|f_i} &= \sum_{i_0=0}^{n-1} \sum_{i_1=0}^{n-1-z_0} \cdots \sum_{i_{r-1}=0}^{n-1-z_{r-2}} \sum_{i_r=0}^{n-1-z_{r-1}} C_{n_0}^{i_0} C_{n-z_0}^{i_1} \cdots C_{n-z_{r-3}}^{i_{r-2}} \times \\
 &\times \prod_{m=0}^{2r-2} \left\{ \sum_{l=\max(0, m-2r+1+s)}^{\min(m, s)} \left[ \frac{C_s^l C_{2r-1-s}^{m-l}}{C_{2r-1}^m} \right] P_0^m (1-P_0)^{2r-1-m} \sum_{t=0}^{k-1-l} C_{2k-1-s}^t P_0^t (1-P_0)^{2k-t-s-1} \right\} \times \\
 &\times \left[ P_0^{2r-1} \sum_{t=0}^{k-s-1} C_{2k-1-s}^t P_0^t (1-P_0)^{2k-1-s-t} \right]^{n-z_{2r-2}},
 \end{aligned} \tag{6}$$

где  $P_0$  – параметр биномиального потока ошибок;

$$z_r = \sum_{i=0}^r j_i.$$

Оценку  $P_c(F)$  при большом числе РП и радиоканалах, отличных от двоичного симметричного канала (ДСК), целесообразно проводить моделированием. При этом возникает задача выбора исследуемого варианта множества РП.

Всего на  $d$  повторах сообщения длиной  $n$  может быть построено  $N_n = 2^{d-1}$  различных мажоритарных РП рассматриваемого типа, из которых, в свою очередь, образуется  $2^{N_n} - 1$  непустых наборов РП. Если ограничиться только такими множествами РП, в которых каждый повтор сообщения участвует хотя бы в одном РП, то их количество для  $d$  повторов  $R(d)$  можно получить из соотношения

$$R(d) = 2^{N_n(d)} - \sum_{i=1}^{d-1} C_d^i R(d-i), \tag{7}$$

$$R(d) = 1.$$

Но и значение  $R(d)$  уже при  $d=5$  слишком велико, чтобы оценивать каждый допустимый вариант множества РП. Кроме того, прежде чем оценивать и искать среди них вариант построения ДКП, удовлетворяющего другим ограничениям (например, на объем памяти), желательно убедиться, достижима ли при заданном количестве повторов требуемая вероятность правильного приема сообщения. Эту оценку можно сделать, исследовав полный ДКП (в котором реализованы все  $N_n$  РП). В таком декодере мощность множества  $F_i = 2^{i-2}$ . ( $F_1=1$ ), а каждый повтор участвует в  $2^{d-2}$  РП. Если считать, что все ошибки декодирования по любому РП обнаруживаются, то  $P_c$  полного ДКП – верхняя оценка для любого ДКП, использующего не большее количество повторов.

Оценку эффективности полного ДКП проводим имитационным моделированием на четырех дискретных каналах связи с различным характером ошибок. Каналы 1,2 – ДСК. Канал 3 с пачками ошибок; интервалы в нем между началами пачек ошибок экспоненциально распределены с параметром  $\lambda = 0,002$  а длина пачек имеет равномерное распределение с параметрами  $[0,200]$ ; допускаясь перекрытие пачек ошибок; внутри пачки вероятность ошибки на символ равна 0,5, а между пачками – 0,01. В скоростном КВ-радиоканале 4 записывался поток ошибок, образованный параллельным модемом. Для рассматриваемых каналов  $P_0$  имеет следующие значения: для первого  $P_0=0,08$ ; для второго  $P_0 = 0.1$ ; для третьего  $P_0=0,1$ ; для четвертого  $P_0 = 0,09$ . Моделирующая программа позволяет задавать параметры КП (длина повтора, количество повторов сообщения, любое множество  $F$  мажоритарных РП) и имитирует работу декодера на записях заранее подготовленных потоков ошибок дискретных каналов.

Значения  $P_c(d)$ , полученные в результате моделирования полного ДКП кодов с повторением ( $n=100, d=7$ ), приведены в табл. 1 и на рисунке. В табл. 2 даны результаты сравнения  $P_c$  полного ДКП и  $P_{c1}$  ДКП с одним РП  $f\left(\frac{d+1}{2}; X_1, \dots, X_d\right)$ . Здесь

$$\Delta = |P_c - P_{c1}|, \tag{8}$$

$$\delta = \frac{\Delta}{1 - P_{c1}} 100\%. \tag{9}$$

Таблица 1

**Значения  $P_c(d)$ , полученные в результате моделирования полного ДКП кодов с повторением ( $n=100$ )**

№ канала связи	$P_c(d)$ для $d$ , равного				
	3	4	5	6	7
1	0,19	0,45	0,80	0,96	0,99
2	0,07	0,22	0,59	0,86	0,97
3	0,73	0,85	0,93	0,97	0,99
4	0,58	0,63	0,70	0,73	0,76

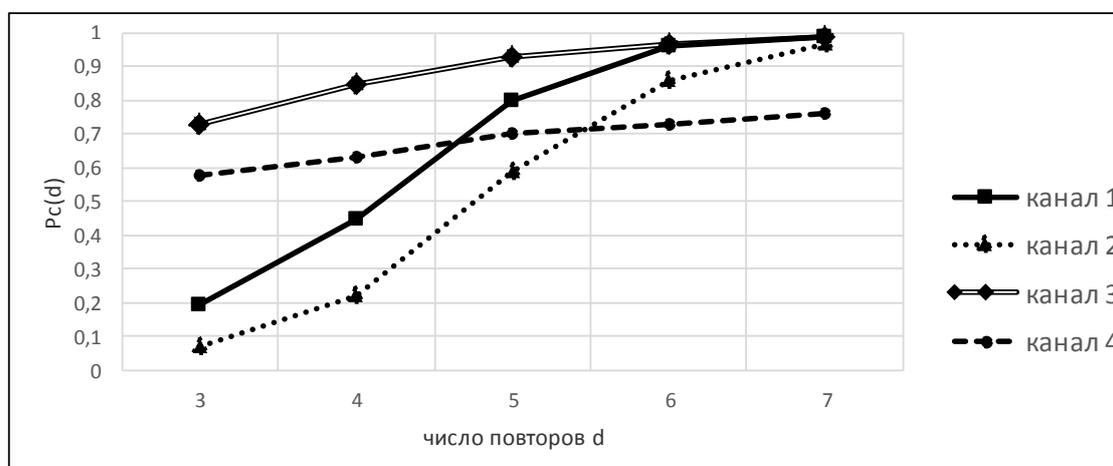


Рис. Значения  $P_c(d)$ , полученные в результате моделирования полного ДКП кодов с повторением ( $n=100$ )

Таблица 2

**Результаты сравнения  $P_c$  полного ДКП и  $P_{c1}$  ДКП с одним РП  $f\left(\frac{d+1}{2}; X_1, \dots, X_d\right)$**

№ канала связи	$d=5$			$d=7$		
	$P_{c1}$	$\Delta$	$\delta, \%$	$P_{c1}$	$\Delta$	$\delta, \%$
1	0,63	0,17	46	0,89	0,10	91
2	0,42	0,17	30	0,76	0,21	88
3	0,76	0,17	71	0,87	0,12	92
4	0,63	0,17	19	0,68	0,08	25

Более подробно работу ДКП характеризуют условные эффективности:

$$P_{ij} = \frac{m_{ij}}{M_{ij}}; P_i = \frac{M_i}{\sum_{i=1}^d M_i}; P_j = \frac{\sum_{i=1}^d m_{i,j}}{\sum_{i=1}^d M_i}; \quad (10)$$

где  $P_{ij}$  – условная эффективность РП  $j$ -го вида на  $i$ -м шаге декодирования;

$P_i$  – условная эффективность использования  $i$ -го шага декодирования;

$P_j$  – условная эффективность РП  $j$ -го вида;

$m_{ij}$  – количество сообщений, принятых на  $i$ -м шаге декодирования при использовании РП  $j$ -го вида;

$M_i$  – количество сообщений, принятых на  $i$ -м шаге декодирования.

Шагом декодирования называем процесс применения РП  $f \in F_i$ , а вид РП определяется фактическим количеством повторов. Значения  $P_i, P_j$  для рассматриваемого полного ДКП и перечисленных каналов показаны в табл. 3, 4.

Таблица 3

**Связь между вероятностью безошибочного приема сообщений (в %) и числом повторов в зависимости от характера ошибок**

№ канала связи	$P_c(\%)$ для $d$ , равного				
	3	4	5	6	7
1	19	26	36	15	3
2	8	15	38	28	6
3	31	13	9	4	3
4	21	7	9	4	5

Таблица 4

**Связь между вероятностью безошибочного приема сообщений (в %) и критериями в зависимости от характера ошибок**

№ канала связи	$P_j(\%)$ для различных критериев $\alpha$ из $k$			
	1×1	2×3	3×5	4×7
1	0,1	80	20	0,1
2	0,1	59	41	2,0
3	63,0	34	1	-
4	74,0	25	2	0,1

Анализ результатов моделирования подтверждает бесспорное преимущество применения полного набора РП для обработки кодов с повторением в симплексных системах радиосвязи.

Примером технической реализации полного набора решающих правил может выступать класс патентно-способных технических решений [4–7].

#### Литература

1. Элементы теории передачи дискретной информации / под ред. Л. П. Пуртова. М.: Связь, 1972. 231. с.
2. Калмыков И. А., Резеньков Д. Н., Зиновьев А. В., Хайватов А. Б. Сравнительная оценка основных методов коррекции ошибок модулярными кодами для современных информационных технологий систем управления / Успехи современного естествознания. 2009. № 4. С. 39–40.
3. Малофей О. П., Стадникова А. Н. Оценка сложности устройств мажоритарного декодирования. V Международная НТК «Инфокоммуникационные технологии в науке, производстве и образовании» (Инфоком-5). Кисловодск, Ставрополь, 2–6 мая 2012. Сборник научных трудов ч.1. с. 233–236.
4. Устройство коррекции ошибок с расширенным набором решающих правил. Копытов В. В., Малофей О. П., Малофей А. О., Малофей Ю. О., Царев Д. Б. Патент на изобретение RUS 2152129 от 27.06.2000 Бюл. № 18.
5. Устройство для исправления ошибок при многократном повторении сообщений. Кириянов Д. В., Коваленко А. П., Ашанин В. С., Малофей О. П., Малофей А. О. Патент на изобретение RUS 2023348 от 15.11.1994.
6. Устройство коррекции ошибок с расширенным набором решающих правил и учетом сигнала стирания. Малофей О. П., Малофей А. О., Малофей Ю. О., Авдеев В. Г., Якименко А. И., Якименко И. Л. Патент на изобретение RUS 2208907 06.03.2001.
7. Устройство коррекции ошибок с расширенным набором решающих правил и учетом адаптивного сигнала стирания. Малофей А. О., Малофей О. П., Рыбальченко М. С., Щелкунова Ю. О. Патент на изобретение RUS 2309553 24.08.2005.