ФИЗИКА И МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

Карслиева Валентина Михайловна

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ИМЕЮЩИЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ СТРУКТУРЫ

Статья посвящена построению нелинейных уравнений с частными производными, обладающими операторной структурой Лакса. Предполагается, что наличие лаксовой пары позволит провести интегрирование полученных уравнений методом обратной задачи рассеяния. Для уравнений с частными производными, имеющими вид локального закона сохранения, предложена одна из возможных лаксовых пар.

Ключевые слова: закон сохранения, метод обратной задачи рассеяния, нелинейные уравнения с частными производными, пара Лакса, эволюционное уравнение.

Karslieva Valentina M.

NONLINEAR EQUATIONS WITH INTEGRATED OPERATOR STRUCTURES

The article is devoted to the construction of nonlinear equations with partial derivatives possessing Lax operator structure. The presence of Lax pair is supposed to allow to integrate the obtained equations with the help of the inverse scattering problem method. For the equations with partial derivatives having the form of local conservation law one of the possible Lax pairs is given.

Key words: the conservation law, the inverse scattering problem method, nonlinear equations with partial derivatives, Lax pair, the evolutionary equation.

Методов решения в общем виде для большого класса нелинейных уравнений в частных производных известно немного. Одним из методов, когда решение можно найти, является представление уравнения в виде эволюционного операторного уравнения Лакса [1]

$$L_t = [L, A] = LA - AL, \tag{1}$$

где операторы могут быть различной природы (дифференциальные, интегральные, матрицы, проектирующие и др.). Идея, лежащая в основе работы Лакса, заключается в том, что нелинейное уравнение (1) эквивалентно системе линейных уравнений:

$$L\varphi = \mu\varphi, \tag{2}$$

$$\varphi_t = A\varphi, \tag{3}$$

для оператора L поставлена спектральная задача (φ – собственная функция, μ – собственное значение оператора L), оператор A определяет эволюцию собственных функций по времени.

В настоящее время вопрос о критериях, которым должны удовлетворять операторы, влекущие интегрирование в явном виде, остается открытым и по структуре уравнения нельзя определить, возможно, ли применение этого метода. Поэтому мы предлагаем идти обратным путем: выбрать пару Лакса, которая порождает интегрируемое нелинейное уравнение.

Рассмотрим частный случай, когда L, A дифференциальные операторы первого порядка вида

$$L = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + u, \quad A = \beta \frac{\partial}{\partial x} + v,$$

где $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}$ – постоянные матрицы,

$u=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}$ – матрицы с компонентами, зависящими от x и t.

Лемма 1. Имеет место формула:

$$[L,A]=[\alpha,\beta]\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\left([u,\beta]+[\alpha,v]\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left([u,v]+\left(\alpha v_x-\beta u_x\right)\right).$$

Доказательство. Действуя коммутатором на произвольную функцию φ, получим:

$$[L,A]\varphi=\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+u\right)\left(\beta\frac{\partial}{\partial x}+v\right)\varphi-\left(\beta\frac{\partial}{\partial x}+v\right)\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+u\right)\varphi=$$

$$=\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x}+u\right)\left(\beta\varphi_x+v\varphi\right)-\left(\beta\frac{\partial}{\partial x}+v\right)\left(\alpha\varphi_x+u\varphi\right)=\alpha\beta\varphi_{xx}+u\beta\varphi_x+\alpha\frac{\partial}{\partial x}(v\varphi)+uv\varphi-$$

$$-\beta\alpha\varphi_{xx}-v\alpha\varphi_x-\beta\frac{\partial}{\partial x}(u\varphi)-vu\varphi=[\alpha,\beta]\varphi_{xx}+\left(u\beta+\alpha v-v\alpha-\beta u\right)\varphi_x+(\alpha v_x+uv-\beta u_x-vu)\varphi=$$

$$=[\alpha,\beta]\varphi_{xx}+\left([u,\beta]+[\alpha,v]\right)\varphi_x+\left([u,v]+\left(\alpha v_x-\beta u_x\right)\right)\varphi,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Если

$$[\alpha,\beta]=0,\quad [u,\beta]+[\alpha,v]=0, \tag{4}$$

то

$$[L,A]=[u,v]+\left(\alpha v_x-\beta u_x\right). \tag{5}$$

Лемма 2. Условия (4) выполняются если

$$\begin{cases} \alpha_{12}\beta_{21}=\beta_{12}\alpha_{21}, \\ \alpha_{11}\beta_{12}+\alpha_{12}\beta_{22}-\beta_{11}\alpha_{12}-\beta_{12}\alpha_{22}=0, \\ \alpha_{21}\beta_{11}+\alpha_{22}\beta_{21}-\beta_{21}\alpha_{11}-\beta_{22}\alpha_{21}=0, \\ \alpha_{12}v_{21}+u_{12}\beta_{21}-\beta_{12}u_{21}-\alpha_{21}v_{12}=0, \\ \alpha_{11}v_{12}+\alpha_{12}v_{22}+\beta_{12}u_{11}+\beta_{22}u_{12}-\beta_{11}u_{12}-\beta_{12}u_{22}-\alpha_{12}v_{11}-\alpha_{22}v_{12}=0, \\ \alpha_{21}v_{11}+\alpha_{22}v_{21}+\beta_{11}u_{21}+\beta_{21}u_{22}-\beta_{21}u_{11}-\beta_{22}u_{21}-\alpha_{11}v_{21}-\alpha_{21}v_{22}=0. \end{cases} \tag{6}$$

Доказательство. Имеем

$$[\alpha,\beta]=\alpha\beta-\beta\alpha=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha_{11}\beta_{11}+\alpha_{12}\beta_{21} & \alpha_{11}\beta_{12}+\alpha_{12}\beta_{22} \\ \alpha_{21}\beta_{11}+\alpha_{22}\beta_{21} & \alpha_{21}\beta_{12}+\alpha_{22}\beta_{22} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \beta_{11}\alpha_{11}+\beta_{12}\alpha_{21} & \beta_{11}\alpha_{12}+\beta_{12}\alpha_{22} \\ \beta_{21}\alpha_{11}+\beta_{22}\alpha_{21} & \beta_{21}\alpha_{22}+\beta_{22}\alpha_{22} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha_{12}\beta_{21}-\beta_{12}\alpha_{21} & \alpha_{11}\beta_{12}+\alpha_{12}\beta_{22}-\beta_{11}\alpha_{12}-\beta_{12}\alpha_{22} \\ \alpha_{21}\beta_{11}+\alpha_{22}\beta_{21}-\beta_{21}\alpha_{11}-\beta_{22}\alpha_{21} & \alpha_{21}\beta_{12}-\beta_{21}\alpha_{12} \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$[u,\beta]+[\alpha,v]=u\beta-\beta u+\alpha v-v\alpha=$$

$$=\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} u_{11}\beta_{11}+u_{12}\beta_{21} & u_{11}\beta_{12}+u_{12}\beta_{22} \\ u_{21}\beta_{11}+u_{22}\beta_{21} & u_{21}\beta_{12}+u_{22}\beta_{22} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \beta_{11}u_{11}+\beta_{12}u_{21} & \beta_{11}u_{12}+\beta_{12}u_{22} \\ \beta_{21}u_{11}+\beta_{22}u_{21} & \beta_{21}u_{12}+\beta_{22}u_{22} \end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} \alpha_{11}v_{11}+\alpha_{12}v_{21} & \alpha_{11}v_{12}+\alpha_{12}v_{22} \\ \alpha_{21}v_{11}+\alpha_{22}v_{21} & \alpha_{21}v_{12}+\alpha_{22}v_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_{11}\alpha_{11}+v_{12}\alpha_{21} & v_{11}\alpha_{12}+v_{12}\alpha_{22} \\ v_{21}\alpha_{11}+v_{22}\alpha_{21} & v_{21}\alpha_{12}+v_{22}\alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix},$$

где

$$w_{11} = \alpha_{12}v_{21} + u_{12}\beta_{21} - \beta_{12}u_{21} - v_{12}\alpha_{21}, \tag{8}$$

$$w_{12} = \alpha_{11}v_{12} + \alpha_{12}v_{22} + u_{11}\beta_{12} + u_{12}\beta_{22} - \beta_{11}u_{12} - \beta_{12}u_{22} - v_{11}\alpha_{12} - v_{12}\alpha_{22}, \tag{9}$$

$$w_{21} = \alpha_{21}v_{11} + \alpha_{22}v_{21} + u_{21}\beta_{11} + u_{22}\beta_{21} - \beta_{21}u_{11} - \beta_{22}u_{21} - v_{21}\alpha_{11} - v_{22}\alpha_{21}, \tag{10}$$

$$w_{22} = \alpha_{21}v_{12} + u_{21}\beta_{12} - \beta_{21}u_{12} - v_{21}\alpha_{12}. \tag{11}$$

Равенства (7) – (11) дают требуемые условия (6).

Лемма 3. Если выполняются равенства системы (6) и $\alpha_{11} = \alpha_{22}$, $(\lambda - \alpha_{11})^2 = \alpha_{12}\alpha_{21}$, где $(a+ib)^2 = \lambda^2$ (a, b – неотрицательные постоянные величины), то

$$\alpha_{12}(\beta_{11} - \beta_{22}) = 0,$$

$$\alpha_{21}(\beta_{11} - \beta_{22}) = 0,$$

$$\alpha_{12}\beta_{21} = \beta_{12}\alpha_{21},$$

$$\alpha_{12}v_{21} + u_{12}\beta_{21} - \beta_{12}u_{21} - \alpha_{21}v_{12} = 0, \tag{12}$$

$$\alpha_{12}(v_{22} - v_{11}) + \beta_{12}(u_{11} - u_{22}) + u_{12}(\beta_{22} - \beta_{11}) = 0,$$

$$\alpha_{21}(v_{22} - v_{11}) + \beta_{21}(u_{11} - u_{22}) + u_{21}(\beta_{22} - \beta_{11}) = 0.$$

Утверждение леммы следует из леммы 2.

***Лемма* 4**. Если выполняются равенства системы (6) и $\alpha_{11} = -\alpha_{22} \neq 0$, $\alpha_{12}\alpha_{21} = (a+ib)^2 - {\alpha_{22}}^2 = \lambda^2 - {\alpha_{22}}^2$ (a, b – неотрицательные постоянные величины), то

$$\alpha_{12}\beta_{21} = \beta_{12}\alpha_{21},$$

$$2\alpha_{11}\beta_{12} = \alpha_{12}(\beta_{11} - \beta_{22}),$$

$$2\alpha_{11}\beta_{21} = \alpha_{21}(\beta_{11} - \beta_{22}),$$

$$\alpha_{12}v_{21} - \alpha_{21}v_{12} = \beta_{12}u_{21} - \beta_{21}u_{12}, \tag{13}$$

$$2\alpha_{11}v_{12} + \alpha_{12}(v_{22} - v_{11}) + \beta_{12}(u_{11} - u_{22}) + (\beta_{22} - \beta_{11})u_{12} = 0,$$

$$\alpha_{21}(v_{11} - v_{22}) + (\beta_{11} - \beta_{22})u_{21} + \beta_{21}(u_{22} - u_{11}) - 2\alpha_{11}v_{21} = 0.$$

Утверждение леммы следует из леммы 2.

Замечание 1. Коэффициенты выбираем таким образом, чтобы $\dfrac{\partial L}{\partial t}$ и $[L, A]$ были обыкновенными дифференциальными операторами нулевого порядка, а именно операторами умножения. Для этого необходимо: а) равенство нулю коэффициентов при $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ и $\dfrac{\partial}{\partial x}$, что и берется в лемме 2; б) отсутствие зависимости L от t.

Замечание 2. Считаем, что собственные значения матрицы α либо чисто мнимые, либо имеют вещественные значения разных знаков. Это их соображений, чтобы уравнение $L_0\varphi = \mu\varphi$, где $L_0 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}$ имело нетривиальные ограниченные решения при $x \to \pm\infty$. В частности, собственные значения можно брать такими $\mu = \pm(a+ib)$. Тогда из

$$\det(\alpha - \mu E) = \alpha_{11}\alpha_{22} + \mu^2 - \mu(\alpha_{11} + \alpha_{22}) - \alpha_{12}\alpha_{21}, \tag{14}$$

где E – единичная матрица,

следует, что если $\alpha_{11} = \alpha_{22}$, то $(\lambda - \alpha_{11})^2 = \alpha_{12}\alpha_{21}$, $(a+ib)^2 = \lambda^2$; а если $\alpha_{11} = -\alpha_{22} \neq 0$, то $\alpha_{12}\alpha_{21} = (a+ib)^2 - {\alpha_{22}}^2 = \lambda^2 - {\alpha_{22}}^2$, что и берется в леммах 3,4

.

Теорема 1. Нелинейное уравнение в частных производных

$$\left(\alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\right)\ln u = -\frac{1}{u} + u,$$

где $\alpha, \beta - const$, $u(x,t)$ – функция, имеет представление в виде операторного уравнения Лакса с операторами вида:

$$L = \begin{pmatrix} 2\beta & 0 \\ 0 & 2\beta \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{u} \\ u & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\beta} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{\beta} \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\ln u & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\ln u \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Коэффициенты L и A удовлетворяют системе (12), следовательно, непосредственную подстановку в уравнение Лакса $L_t = [L, A] = LA - AL$, можно осуществить, используя (5):

$$[L, A] = [u, v] + (\alpha v_x - \beta u_x) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{11x} & v_{12x} \\ v_{21x} & v_{22x} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{11x} & u_{12x} \\ u_{21x} & u_{22x} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u_{12}v_{21} - v_{12}u_{21} & u_{11}v_{12} + u_{12}v_{22} - v_{11}u_{12} - v_{12}u_{22} \\ u_{21}v_{11} + u_{22}v_{21} - v_{21}u_{11} - v_{22}u_{21} & u_{21}v_{12} - v_{21}u_{12} \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} \alpha_{11}v_{11x} + \alpha_{12}v_{21x} - \beta_{11}u_{11x} - \beta_{12}u_{21x} & \alpha_{11}v_{12x} + \alpha_{12}v_{22x} - \beta_{11}u_{12x} - \beta_{12}u_{22x} \\ \alpha_{21}v_{11x} + \alpha_{22}v_{21x} - \beta_{21}u_{11x} - \beta_{22}u_{21x} & \alpha_{21}v_{12x} + \alpha_{22}v_{22x} - \beta_{21}u_{12x} - \beta_{22}u_{22x} \end{pmatrix}.$$

$L_t = [L, A]$ в матричной записи будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} u_{11t} & u_{12t} \\ u_{21t} & u_{22t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}v_{11x} + \alpha_{12}v_{21x} - \beta_{11}u_{11x} - \beta_{12}u_{21x} & \alpha_{11}v_{12x} + \alpha_{12}v_{22x} - \beta_{11}u_{12x} - \beta_{12}u_{22x} \\ \alpha_{21}v_{11x} + \alpha_{22}v_{21x} - \beta_{21}u_{11x} - \beta_{22}u_{21x} & \alpha_{21}v_{12x} + \alpha_{22}v_{22x} - \beta_{21}u_{12x} - \beta_{22}u_{22x} \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} u_{12}v_{21} - v_{12}u_{21} & u_{11}v_{12} + u_{12}v_{22} - v_{11}u_{12} - v_{12}u_{22} \\ u_{21}v_{11} + u_{22}v_{21} - v_{21}u_{11} - v_{22}u_{21} & u_{21}v_{12} - v_{21}u_{12} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Таким образом, имеем:

$$\begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{1}{u}\right)_t \\ u_t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\right)\ln u+\frac{1}{u}-u & -\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{1}{u}\right)_x-\frac{1}{u}\left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}\right)\ln u \\ -\frac{\alpha}{\beta}u_x+u\left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}\right)\ln u & -\left(\alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\right)\ln u-\frac{1}{u}+u \end{pmatrix},$$

или

$$\left(\alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\right)\ln u+\frac{1}{u}-u=0, \tag{16}$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)_t=-\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{1}{u}\right)_x-\frac{1}{u}\left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}\right)\ln u, \tag{17}$$

$$u_t=-\frac{\alpha}{\beta}u_x+u\left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}\right)\ln u, \tag{18}$$

$$-\left(\alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\right)\ln u-\frac{1}{u}+u=0. \tag{19}$$

Равенства (17) и (18) выполняются тождественно, а равенства (16) и (19) дают уравнение

$$\left(\alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\right)\ln u=-\frac{1}{u}+u\,.$$

Отметим, что аналогично доказываются все следующие теоремы.

Теорема 2. Нелинейное уравнение в частных производных

$$\alpha u_x e^{-2\beta u}-3\beta u_{xx}+2\beta^2\left(u_x\right)^2+2\beta u_x u_t+u_{xt}=0\,,$$

где $\alpha,\beta-const$, $u(x,t)$ – функция, имеет представление в виде операторного уравнения Лакса с операторами вида:

$$L=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\alpha\beta} \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}+\begin{pmatrix} -\frac{1}{2\beta^2}e^{-2\beta u}-\frac{2}{\alpha}u_x & 0 \\ -u_x & -\frac{1}{2\beta^2}e^{-2\beta u} \end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix} \beta & 0 \\ -\alpha\beta & -\beta \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}+\begin{pmatrix} 2\beta^2 u_x-\alpha\int u_t e^{-2\beta u}dx+2\beta u_t & e^{-2\beta u} \\ 0 & -\alpha\int u_t e^{-2\beta u}dx \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Коэффициенты L и A удовлетворяют системе (12), подстановка в (15) приводит к системе:

$$\frac{1}{\beta}u_t e^{-2\beta u}+2\alpha\beta u_{xt}=-\frac{1}{\alpha\beta}\left(2\beta^2 u_{xx}-\alpha u_t e^{-2\beta u}+2\beta u_{xt}\right)-\beta\left(\frac{1}{\beta}u_x e^{-2\beta u}-\frac{2}{\alpha}u_{xx}\right)+u_x e^{-2\beta u}, \tag{20}$$

$$0=\frac{2}{\alpha}u_x e^{-2\beta u}-\frac{2}{\alpha}u_x e^{-2\beta u}, \tag{21}$$

$$\alpha\beta\left(\frac{1}{\beta}u_x e^{-2\beta u}-\frac{2}{\alpha}u_{xx}\right)-\beta u_{xx}+u_x\left(2\beta^2 u_x+2\beta u_t\right)=-u_{xt}, \tag{22}$$

$$\frac{1}{\beta}u_t e^{-2\beta u} = \frac{1}{\beta}u_t e^{-2\beta u} + u_x e^{-2\beta u} - u_x e^{-2\beta u}. \tag{23}$$

Равенства (20), (21) и (23) выполняются тождественно, а равенство (22) дает уравнение

$$\alpha u_x e^{-2\beta u} - 3\beta u_{xx} + 2\beta^2 \left(u_x\right)^2 + 2\beta u_x u_t + u_{xt} = 0.$$

Теорема 3. Нелинейное уравнение в частных производных

$$\gamma q_x + k(\ln q)_{xx} - 2u_x = q_t, \tag{24}$$

где $\gamma, k - const$, $q(x,t)$, $u(x,t)$ – функции имеет операторное представление в виде Лакса с операторами:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -\frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} \frac{i}{2}\left(\frac{q_x}{q} - \frac{q}{ak}\right) & -\frac{iak+1}{2k}q \\ \frac{iak-1}{2a^2k}q & \frac{i}{2}\left(\frac{q_x}{q} + \frac{q}{ak}\right) \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} - \gamma & ak \\ -\frac{k}{a} & \frac{1}{a} - \gamma \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} iu - \frac{i}{a}q & -\frac{aki+1}{2}q - \frac{ia}{2}\left(\frac{1-a\gamma}{a}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\ln q \\ \frac{aki-1}{2a^2}q + \frac{i}{2a}\left(\frac{1-a\gamma}{a}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}\right)\ln q & iu \end{pmatrix},$$

где $a - const$.

Доказательство. Коэффициенты L и A удовлетворяют системе (13). Непосредственная подстановка в (15) дает:

$$\frac{i}{2}(\ln q)_{xt} - \frac{i}{2ak}q_t = \frac{iak-1}{2a}q_x + \frac{i-ia\gamma}{2}(\ln q)_{xx} + \frac{i}{2}(\ln q)_{xt} - \frac{i-ia\gamma}{2}(\ln q)_{xx} + \frac{i-ia\gamma}{2a^2k}q_x - \frac{iak-1}{2a}q_x +$$
$$+\frac{(ak)^2-1}{4a^2k}q^2 - \frac{(i-ia\gamma)(iak+1)}{4a^2k}q_x + \frac{ak-i}{4ak}q_t - \frac{(ak)^2-1}{4a^2k}q^2 + \frac{(i-ia\gamma)(iak+1)}{4a^2k}q_x - \frac{ak+i}{4ak}q_t, \tag{25}$$

$$-\frac{iak+1}{2k}q_t = iau_x + \frac{(1-a\gamma)(iak+1)}{2ak}q_x - \frac{iak}{2}(\ln q)_{xx} - \frac{i}{2}q_x +$$
$$-\frac{i-ak}{2ak}q^2 - \frac{1-a\gamma}{2ak}q_x - \frac{1}{2k}q_t - \frac{i-ak}{2ak}q^2, \tag{26}$$

$$\frac{iak-1}{2a\ k}q_t = -iu_x + \frac{i}{a}q_x + \frac{ik}{2}(\ln q)_{xx} - \frac{i}{2a}q_x - \frac{i-ia\gamma}{2a}q_x + \frac{1-a\gamma}{2a^2k}q_x + \frac{i+ak}{2a^2k}q^2 - \frac{i+ak}{2a^2k}q^2 -$$
$$-\frac{1-a\gamma}{2a^2k}q_x - \frac{1}{2ak}q_t - \frac{i-ak}{2ak}q^2, \tag{27}$$

$$\frac{i}{2}(\ln q)_{xt} + \frac{i}{2ak}q_t = \frac{iak+1}{2a}q_x + \frac{i-ia\gamma}{2a}(\ln q)_{xx} + \frac{i}{2}(\ln q)_{xt} - \frac{iak+1}{2a}q_x - \frac{i-ia\gamma}{2a}(\ln q)_{xx} - \frac{i-ia\gamma}{2a^2k}q_x -$$
$$-\frac{(ak)^2-1}{4a^2k}q^2 + \frac{(i-ia\gamma)(iak+1)}{4a^2k}q_x + \frac{i-ak}{4ak}q_t +$$
$$+\frac{(ak)^2-1}{4a^2k}q^2 - \frac{(i-ia\gamma)(iak+1)}{4a^2k}q_x + \frac{ak+i}{4ak}q_t. \tag{28}$$

Равенства (25) и (28) выполняются тождественно, а равенства (26) и (27) после приведения подобных слагаемых дают уравнение (24).

Решая задачи естествознания с помощью математического моделирования явлений, зачастую приходится исследовать некоторые уравнения с частными производными. Если такие уравнения рассматривать как динамические системы с бесконечным числом степеней свободы, то возникает вопрос, имеют ли эти уравнения какие-либо интегралы движения. В случае уравнений с частными производными вместо понятия «интеграл движения» используется понятие «закон сохранения». Законы сохранения представляют собой соотношения вида

$$Q_t + G_x = 0, \tag{29}$$

где Q и G – определенные функции решения u уравнения с частными производными и его производных, Q – плотность, – G – поток. Если для систем, определенных на бесконечном интервале ($-\infty \le x \le +\infty$) поток G обращается в ноль при $x \to \pm\infty$, интегрирование обеих частей (29) по x дает

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty} Q dx = \int_{-\infty}^{+\infty} G_x dx = 0 \cdot$$

Отсюда $\int_{-\infty}^{+\infty} G_x dx = const$. Мы можем, таким образом, рассматривать эти величины как аналог для уравнения с частными производными интегралов движения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Если одномерное нелинейное эволюционное уравнение представимо в форме локального закона сохранения, то для него существует пучок (несчетное множество) пар Лакса [1]. Таким образом, наличие хотя бы одной L, A-пары говорит о том, что есть возможность интегрирования. Для этого необходимо подобрать именно такое Лаксово представление, чтобы задача была решена.

Теорема 4. Если нелинейное эволюционное уравнение представимо в форме локального закона сохранения, то вид операторов, удовлетворяющих уравнению Лакса, может быть следующим:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \; A = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & v \\ -v & 0 \end{pmatrix},$$

где α, β $-$ $const$; $u(x,t)$, $v\big(u(x,t)\big)$ – функции.

Доказательство. Коэффициенты L и A удовлетворяют системе (13). Непосредственная подстановка в (15) дает:

$$\begin{pmatrix} u_t & 0 \\ 0 & u_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha v_x - \beta u_x & 0 \\ 0 & \alpha v_x - \beta u_x \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы получаем эволюционное уравнение $(-\beta u + \alpha v)_x = u_t$, имеющее вид локального закона сохранения.

Последняя теорема позволяет подобрать еще одно Лаксово представление к уравнению (23):

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \; A = \begin{pmatrix} -\gamma & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} + \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{q_x}{q} - \dfrac{2}{k}u \\ -\dfrac{q_x}{q} + \dfrac{2}{k}u & 0 \end{pmatrix}.$$

Литература

1. Лакс П. Д. Интегралы нелинейных эволюционных уравнений и уединенные волны. Математика. М.: Мир, 1969.Т. 13. С.128–150.