УДК 338

Мараховский Александр Сергеевич,
Ширяева Наталья Васильевна, Таточенко Тамара Викторовна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

В статье представлено математическое описание процесса оптимального управления социальным сектором экономики. Оптимальное управление позволяет перевести макроэкономическую систему на сбалансированные темпы развития, что является основной проблемой развития региона и страны в целом.

Ключевые слова: социально-экономические системы, экономический рост, математическое моделирование, потребление, валовой выпуск, оптимальное управление.

Marakhovsky Alexander S., Shiryaeva Natalia V., Tatochenko Tamara V.

MATHEMATICAL MODELING OF OPTIMAL CONTROL IN SOCIO-ECONOMIC SYSTEMS

The article describes the mathematical process of optimal management in the social sector of the economy. Allowing to bring the macroeconomic system to a balanced development rate by optimal control is the main problem of development of a region and the whole country.

Key words: socio-economic systems, economic growth, mathematical modeling, consumption, gross output, optimal control.

Обеспечение оптимального управления в социально-экономических системах является серьезной задачей, решение которой позволит с наименьшими затратами провести коренную реструктуризацию экономики на макро и мезоуровне. В основе процесса реструктуризации должен лежать план перевода экономики на сбалансированные темпы развития, которые достигаются при соблюдении определенных пропорций материальных затрат, в том числе затрат на социальную политику. Любая система функционирует для достижения определенной цели, поэтому для дальнейших рассуждений удобно ввести понятие идеальной макроэкономической системы в которой все пропорции затрат являются сбалансированными. Такую систему со сбалансированными траекториями развития будем называть *эталонной*. В работе представлен метод формирования эталонных траекторий, к которым должны стремиться развивающиеся социально-экономические системы с целью получения заданных темпов и пропорций роста, а также заданного уровня потребления в социальном секторе.

Динамический вариант модели Леонтьева, записанный в его обозначениях [1], представляет собой систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений:

$$X(t) = AX(t) + B\dot{X}(t) + Y(t) \quad \text{или} \quad \dot{X}(t) = B^{-1}(E-A)X(t) - B^{-1}Y(t) \,. \tag{1}$$

Формальное решение системы (1) имеет две составляющие – свободную $X_{св}(t)$ и вынужденную $X_{вын}(t)$:

$$X(t) = X_{св}(t) + X_{вын}(t) \tag{2}$$

или

$$X(t) = e^{B^{-1}(E-A)t}X(0) - e^{B^{-1}(E-A)t}\int_0^t e^{-B^{-1}(E-A)\tau}B^{-1}Y(\tau)d\tau \,, \tag{3}$$

где $e^{B^{-1}(E-A)t}$ матричная экспонента.

Предполагая наличие определенных связей между конечным продуктом и валовым выпуском путем введения матрицы норм социально-экономического потребления Q [5] можно существенно упростить решение (3):

$$Y(t) = QX(t) \,. \tag{4}$$

Такое предположение можно принять и оно будет оправданным вследствие того, что валовой выпуск, отводимый на конечное потребление, будет постоянен на достаточно продолжительных временных интервалах [2]. Упрощенная система будет замкнутой по потреблению и иметь следующий вид:

$$\dot{X}(t) = GX(t). \tag{5}$$

Матрица $G=B^{-1}(E\text{-}A\text{-}Q)$ является матрицей однородной. Решение такой системы уже не будет громоздким, а будет иметь компактный вид:

$$X(t) = e^{Gt}X(0), \tag{6}$$

где $X(0)$ – начальные значения системы, отражающие уровень валового выпуска на текущий год.

Воспользовавшись классическим методом расчета переходных процессов получим решение системы (5) в следующем виде:

$$X(t) = C_1\, e^{\lambda_1 t} + C_2\, e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n\, e^{\lambda_n t}, \tag{7}$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ – постоянные интегрирования; λ_n – собственные числа матрицы G, определяющие собственные динамические свойства (СДС) социально-экономической системы [1, 3].

В соответствии с системой национальных счетов учет производства в нашей стране ведется по 17-ти видам экономической деятельности. Для прогнозирования динамики развития валового выпуска необходимо решить систему дифференциальных уравнений, порядок которой равен 17. Решение такой многомерной системы удобно найти матричным способом, применив для этого преобразование подобия. Тогда наша система может быть описана моделью пространства состояний:

$$\dot{X}(t)=\bar{A}X(t)+\bar{B}Y(t), \tag{8}$$

где $\bar{A}=B^{-1}(E-A)$ – основная матрица системы, $\bar{B}=-B^{-1}$ – матрица внешних воздействий.

Решение системы дифференциальных уравнений (8) позволяет однозначно определить прогнозные значения валового выпуска страны или ее регионов. Естественно, без внешнего воздействия со стороны государства и неэффективного ведения производства расчетные значения оказываются несбалансированными. В связи с этим возникает задача балансировки основных макроэкономических показателей по всем видам экономической деятельности. Для этого необходимо определить такой уровень социально-экономического потребления, который позволил бы системе находиться в постоянном и сбалансированном расширении. Это расширение отмечается экономистами-классиками как магистральное развитие или неймановский луч [4]. Данная задача решается на основе принципа максимума Понтрягина из теории оптимального управления.

Вся сложность заключается в том, что непосредственно для лиц принимающих решение важно знать не только прогнозные значения валовых выпусков, а оптимальный уровень общественного потребления, включающий всю социально-экономическую нагрузку. Такая задача сводится к определению матрицы Z, связывающей конечный продукт Y с валовым выпуском:

$$Y(t)=ZX(t). \tag{9}$$

Выражение (9) позволяет записать модель, замкнутую по потреблению в следующем виде:

$$\dot{X}(t)=(\bar{A}+\bar{B}Z)X(t). \tag{10}$$

Информация об оптимальном управлении системой содержится в матрице $\bar{B}Z$. На эту величину необходимо изменить коэффициенты матрицы $\bar{A}$ с целью сбалансированного функционирования макросистемы вследствие оптимального управления.

Запись получившейся системы уравнений свидетельствует о наличие положительной обратной связи. Системы с положительной обратной связью являются неустойчивыми. Методы определения матрицы Z, в которой заложена информация о социально-экономических нормах и затратах разработаны для устойчивых систем. Поэтому возникает задача разделения общей неустойчивой системы (10) на подсистемы. Одна из которых была бы устойчивой и многомерной, а вторая неустойчивой и одномерной. Такое разделение может быть осуществлено с использованием преобразования подобия позволяющего выделить n новых фазовых переменных $\tilde{X}_h$ с помощью:

$$X_i = \sum_{h=1}^{n} t_{ih}\, \tilde{X}_h \quad или \quad X = T\tilde{X}, \tag{11}$$

в результате система

$$\left.\begin{aligned} \dot{\tilde{X}}(t) &= \tilde{G}\,\tilde{X}(t), \qquad \tilde{X}(0) = \tilde{X}_0 \\ \text{где } \tilde{G} &\equiv T^{-1}\,GT, \qquad \tilde{X}_0 \equiv T^{-1}\,X_0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

будет содержать матрицу $\tilde{G}$, структура которой значительно проще, чем первоначальная. Если имеется возможность применения преобразования подобия (11), которое преобразует матрицу G в диагональный вид, то первоначальную систему с помощью коэффициентов $\tilde{X}_h$ можно привести к системе с «разделенными» переменными:

$$\frac{d\tilde{X}_h}{dt} = \lambda_h \tilde{X}_h, \tag{13}$$

решение такой системы запишется в виде:

$$\tilde{X}_h = \tilde{X}_{h0}\, e^{\lambda_h t} \quad (h = 1,2,...,n). \tag{14}$$

Окончательный вариант решения системы с использованием преобразования подобия содержит диагональную матрицу $diag(e^{\lambda t})$:

$$X(t) = T \cdot diag(e^{\lambda t}) \cdot T^{-1} \cdot X(0), \tag{15}$$

где λ и T – собственные числа и векторы матрицы G.

Применение преобразования подобия позволяет привести систему к диагональному виду, в котором ее можно разбить на подсистемы. Эти подсистемы можно соединить параллельно, математический аппарат параллельного соединения систем разработан в теории автоматического управления и известен. Преобразование подобия применяется не только к замкнутым системам, но и к разомкнутым. В этом случае над матрицами подобной системы необходимо выполнить следующие преобразования:

$$\tilde{A} = T^{-1}\bar{A}T, \quad \tilde{B} = T^{-1}\bar{B} \tag{16}$$

Динамические свойства подобной системы и первоначальной системы абсолютно одинаковы, так как у них один и тоже спектр собственных чисел. Основная матрица подобной системы диагональная, поэтому возможно разделение системы на параллельные подсистемы. Для разделения необходимо воспользоваться теоремой Фробениуса – Перрена, из которой следует, что в модели макроэкономической балансовой системе среди положительных собственных чисел обязательно найдется такое минимальное число, которому соответствует целиком положительный собственный вектор. Выделить подсистему с минимальным собственным числом не составляет труда. Она будет одномерной, а наличие положительного числа в показателе экспоненты будет свидетельствовать о постоянном росте, что переведет ее в разряд неустойчивых систем. Вторая подсистема будет устойчивой и для нее можно синтезировать оптимальный регулятор.

Представим подобную систему в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{X}}1 \\ \dot{\tilde{X}}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}1 & \tilde{A}2 \\ \tilde{A}3 & \tilde{A}4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{X}1 \\ \tilde{X}2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{B}1 & \tilde{B}2 \\ \tilde{B}3 & \tilde{B}4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{Y}1 \\ \tilde{Y}2 \end{pmatrix} \tag{17}$$

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{X}1 \\ \tilde{X}2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}1 & \tilde{A}2 \\ \tilde{A}3 & \tilde{A}4 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{B}1 & \tilde{B}2 \\ \tilde{B}3 & \tilde{B}4 \end{pmatrix}.$$

Это позволяет разбить матрицы и векторы первоначальной системы на составляющие со следующими размерностями:

$$\tilde{X}1[1], \tilde{X}2[n-1], \tilde{A}1[1], \tilde{A}2[1,n-1], \tilde{A}3[n-1,1], \tilde{A}4[n-1,n-1].$$

размерности подматриц в матрицах $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ одинаковы. Матрица подобной системы диагональная, значит коэффициенты подматрицы $\tilde{A}2$ и $\tilde{A}3$ содержат нули. что позволяет представить систему (17) в виде параллельного соединения двух подсистем:

$$\dot{\tilde{X}}1(t) = \tilde{A}1\tilde{X}1(t) + \tilde{B}2\tilde{Y}1(t), \tag{18}$$

$$\dot{\tilde{X}}2(t)=\tilde{A}4\tilde{X}2(t)+\tilde{B}4\tilde{Y}2(t)\,. \tag{19}$$

Такое соединение можно представить в графическом виде, как это показано на рис. 1.

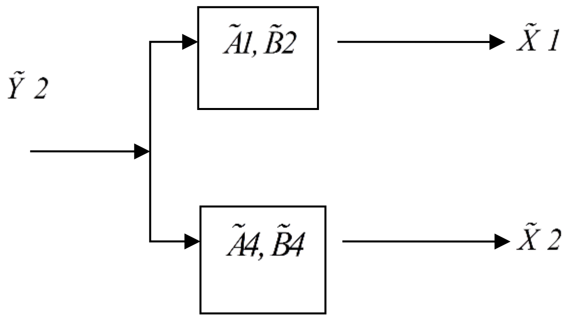

Рис. 1. Параллельное соединение двух подсистем.

Вход $\tilde{Y}2$ оказывает воздействие на обе подсистемы. Его можно оптимизировать путем применения метода оптимального синтеза линейно-квадратичного регулятора. Причем, исходя из структуры самой системы (17), этот же вход будет воздействовать и на неустойчивую систему. Конечно, это воздействие будет неоптимальным, но в целом, так как одна из подсистем будет функционировать наилучшим образом, то и вся система должна работать более эффективно. Графически данная ситуация представлена на рис. 2. Вторая подсистема управляется обратной связью с линейно-квадратичным регулятором и потому является оптимальной.

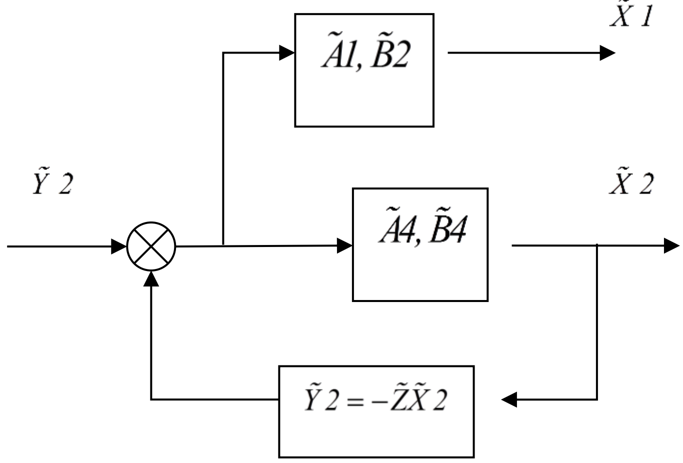

Рис. 2. Соединение подсистем с обратной связью.

Для определения $\tilde{Z}$ в цепи отрицательной обратной связи $\tilde{Y}2=-\tilde{Z}\tilde{X}2$ необходимо минимизировать квадратичный функционал:

$$J(X)=\int_0^{\infty}(\tilde{X}2^T Q\tilde{X}2+\tilde{Y}2^T R\tilde{Y}2)dt\,, \tag{20}$$

здесь Q и R – матрицы весовых коэффициентов. Эти матрицы определяют соотношение между качеством регулирования экономического процесса в макросистеме и затратами на управление.

Функционал (20) позволяет оптимизировать управление в системе, затратив при этом минимальное количество усилий с точки зрения управления динамикой выхода $\tilde{X}2$ посредством входа $\tilde{Y}2$. Для решения задачи минимизации (20) необходимо применить метод классического вариационного исчисления, для этого составим вспомогательный функционал:

$$J(X)=\int_0^{\infty}\Big[(\tilde{X}2^T R\tilde{X}2+\tilde{Y}2^T Q\tilde{Y}2)-2\lambda^T(\dot{\tilde{X}}2-\tilde{A}4\tilde{X}2-\tilde{B}4\tilde{Y}2)\Big]dt\ , \tag{21}$$

где λ – $(n\text{-}1)$ – мерный вектор множителей Лагранжа.

Решение вариационной задачи минимизации функционала (21) для подсистемы (19) дает следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{X}}2 = \tilde{A}4\tilde{X}2 + \tilde{B}4\tilde{Y}2 \\ \dot{\lambda} = -Q\tilde{X}2 - \tilde{A}4^T\lambda \\ \tilde{Y}2 = -R^{-1}\tilde{B}4^T\lambda \end{cases} . \tag{22}$$

Подставив значение $\tilde{Y}2$ в первое уравнение системы (22) получим:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{X}}2 = \tilde{A}4\tilde{X}2 - \tilde{B}4R^{-1}\tilde{B}4^T\lambda \\ \dot{\lambda} = -Q\tilde{X}2 - \tilde{A}4^T\lambda \end{cases} . \tag{23}$$

Для решения данной системы необходимо ввести соответствующую замену переменных:

$$\lambda = P\tilde{Y}2 . \tag{24}$$

Умножая слева первое равенство в системе (23) на матрицу *P* и вычитая из него второе равенство этой системы, окончательно получим:

$$P\tilde{A}4 + \tilde{A}4^T P - P\tilde{B}4R^{-1}\tilde{B}4^T P + Q = 0 . \tag{25}$$

Уравнение (25) является алгебраическим матричным уравнением Риккати [5], в которое вырождается дифференциальное уравнение Риккати в установившемся режиме при $t \to \infty$. Само по себе решение этого уравнения является сложной задачей, но оно стандартизовано и потому в некоторых случаях существует, что дает нам возможность определения коэффициентов матрицы *P*. Подставив выражение (24) в последнее уравнение системы (23), получим искомое уравнение оптимального управления:

$$\begin{aligned} &\tilde{Y}2 = -R^{-1}(\tilde{B}4)^T P\tilde{X}2 = -\tilde{Z}\tilde{X}2, \\ &\tilde{Z} = R^{-1}(\tilde{B}4)^T P \end{aligned} . \tag{26}$$

Замкнутая матрица второй подсистемы при наличии линейно-квадратичного регулятора $\tilde{Z}$ будет определяться по формуле:

$$\tilde{G}4 = \tilde{A}4 - \tilde{B}4 \cdot \tilde{Z} . \tag{27}$$

тогда подобная (уже оптимальная) система (17) будет выглядеть так:

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{X}}1 \\ \dot{\tilde{X}}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}1 & \tilde{A}2 \\ \tilde{A}3 & \tilde{G}4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{X}1 \\ \tilde{X}2 \end{pmatrix} \tag{28}$$

или в сокращенном варианте

$$\dot{\tilde{X}}(t) = \tilde{A}onm\tilde{X}(t), \tag{29}$$

где $\tilde{A}onm$ – матрица оптимизированных коэффициентов замкнутой подобной системы.

Возврат к замкнутой матрице коэффициентов макросистемы осуществляется с помощью обратного преобразования подобия:

$$\bar{A}onm = T\tilde{A}onmT^{-1} . \tag{30}$$

Эта матрица необходима для определения той самой первоначальной добавки к коэффициентам несбалансированной системы для получения оптимального управления:

$$\bar{B}Z = \bar{A} - \bar{A}onm , \tag{31}$$

а используя уравнение (12) оценивается оптимальный уровень конечного продукта, учитывающего социально-экономическая нагрузку макросистемы.

Таким образом, путем разделения макроэкономических систем на подсистемы появляется возможность оптимального определения необходимого уровня затрат этих систем, что создает предпосылки для более эффективного ведения процесса управления социально-экономической политикой внутри региона или страны в целом.

Литература

1. Торопцев Е. Л., Мараховский А. С. Методы достижения оптимальных траекторий экономического развития на основе межотраслевых моделей. Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2007. Т. 2. С. 18.

2. Соколин В. Л. Система таблиц «Затраты – Выпуск» России за 2000 год: Стат.сб./Госкомстат России. М., 2003.

3. Торопцев Е. Л., Гурнович Т. Г. Анализ и управление динамическими свойствами экономических систем // Вопросы статистики. 2000. № 4. С. 28.

4. Тер-Крикоров А. М. Оптимальное управление и математическая экономика. М.: Наука, 1977. 216 с.

5. Гудвин Г. К. Проектирование систем управления. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. 911 с.

УДК 339.9

Наврадов Юрий Азарьевич

О СУЩНОСТИ ВНЕШНЕЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОРГАНИЗАЦИИ

В статье приводится теоретический обзор мнений ученых, историков о понятии внешнеэкономической деятельности, анализируется трактовка ВЭД в законодательстве Российской Федерации.

Ключевые слова: внешнеэкономическая деятельность, внешнеэкономические связи, внешняя торговля, экспорт, импорт.

Navradov Yuri A.

OF ENTITIES OF FOREIGN ECONOMIC ACTIVITIES OF THE ORGANIZATION

Provides a theoretical overview of the views of scientists, historians about the concept of foreign economic activity, analyses the interpretation of FEA in the legislation of the Russian Federation.

Key words: foreign economic activity, foreign economic relations, foreign trade, export, import.

Сегодня можно обсуждать степень развитости экономики Российской Федерации, ее положительные и отрицательные стороны, но, безусловно, рынок вошел в нашу жизнь и его надо совершенствовать. Важнейшей составляющей рыночной экономики является внешнеэкономическая деятельность. Причем чем выше уровень развития экономики, тем больше лиц, занимающихся данным видом деятельности, как на уровне государства, так и на уровне отдельных юридических или физических лиц. К внешнеэкономической деятельности относятся международная торговля, экспортно-импортные сделки, информационные технологии, инвестиции, услуги, движение капитала и т. д.

Необходимо подчеркнуть, что расширение экспортной деятельности привлекательно не только для государства, которое ее стимулирует. Цены на экспортируемую продукцию на мировом рынке, как правило, выше, чем на внутреннем. Льготные режимы налогообложения для экспортеров позволяют обеспечить большую прибыль от экспортных сделок продукции, товаров, работ и услуг. Субъекты хозяйствования, экспортирующие готовую продукцию, создают финансовую базу для самофинансирования, расширенного воспроизводства, решения проблем социального и материального поощрения персонала, а также устойчивого роста собственного капитала.

Следует отметить, что мнения большинства ученых, историков совпадают в том, что внешнеэкономическая деятельность начала зарождаться тысячи лет назад, а окончательно сложилась в конце XIX – начале XX веков. Именно в этот период возникло крупное машинное производство, которое создало возможность расширения мировых хозяйственных связей и предопределило их необходимость. Однако, в российской экономической литературе понятие внешнеэкономической деятельности появилось сравнительно недавно (с 1986 года), что связано с децентрализацией внешней торговли, проводимой в рамках реформы экономики и системы управления России. До этого периода, как отмечается, например, в работе Л. Е. Стровского «Внешнеэкономическая деятельность предприятия», любые международные связи рассматривались руководством государства как вынужденное явление, воздействие которого на экономику должно быть сведено к минимуму. Таким образом претворялась в жизнь политика административно-командной системы, направленная на изоляцию страны от внешнего мирового хозяйства, создание замкнутой экономики. Последняя во всех сферах была лишена баланса, поэтому импорт рассматривался как инструмент латания дыр, а экспорт – как необходимость платы за импорт [2, с. 3].

В современных условиях внешнеэкономическая деятельность (ВЭД) осуществляется на уровне субъектов хозяйствования различных организационно-правовых форм и видов деятельно-