

Для построения и реализации вычислительного эксперимента разработан специальный тестовый пример, в котором генерируются значения (массивы) исходных данных, а также точное решение $\hat{q}_T(\hat{t}, P)$ (поле концентрации примесей) [1]. Дальнейшая реализация вычислительного алгоритма проводится в предположении о том, что распределение $\hat{q}(\hat{t}, P)$ не известно и должно определяться в ходе вычислений при известных исходных данных, которое обозначено $\hat{q}_M(\hat{t}, P)$. Точность вычислений оценивается значением величины отклонения приближенного решения $\hat{q}_M(\hat{t}, P)$ от точного $\hat{q}(\hat{t}, P)$ по формуле $\sigma = |\hat{q}_T(\hat{t}, P) - \hat{q}_M(\hat{t}, P)|$. Исследование сходимости и устойчивости данной вычислительной модели является следующим этапом настоящей работы.

Литература

1. Наац В. И., Наац И. Э. Математические модели и численные методы в задачах экологического мониторинга атмосферы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 328 с.
2. Наац В. И., Ярцева Е. П. Разработка качественной модели и итерационного алгоритма для оценки концентрации загрязняющих примесей в атмосфере // Вестник СКФУ. Научный журнал. 2013. № 1 (34). С. 15–21.
3. Наац В. И., Ярцева Е. П. Качественная модель оценки концентрации аэрозольных примесей в атмосфере, основанная на интегральном представлении решения уравнения турбулентной диффузии // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2012. № 1. С. 38–43.
4. Наац В. И., Ярцева Е. П. Вычислительный алгоритм в модели переноса примесей в турбулентной атмосфере на основе нестационарного трехмерного уравнения. // Моделирование и анализ информационных систем: Труды международной научной конференции. Ярославль, 6–7 февраля 2012 г. Ярославль: ЯрГУ, 2012. С. 140–142.
5. Наац В. И., Ярцева Е. П. Численное исследование рекурсивных и итерационных алгоритмов в задаче моделирования переноса аэрозолей в атмосфере // Вестник СГУ. Выпуск 75(4), 2011. С. 44–50.
6. Наац В. И., Ярцева Е. П. Построение и исследование вычислительного алгоритма для параметризованного нестационарного уравнения примесей в атмосфере. Современные достижения в науке и образовании: математика и информатика: Материалы международной научно-практической конференции, Архангельск, 1–5 февраля 2010 г. // Федер. агентство по образованию, Ком. по науке и проф. образованию Арханг. обл., Помор. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. Архангельск: КИРА, 2010. С. 561–562.

УДК 622.276.5+51-7

Толпаев Владимир Александрович, Рыскаленко Роман Андреевич

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ ПЛАСТОВОГО ДАВЛЕНИЯ ПО ДАННЫМ ГАЗОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ СКВАЖИН

В статье предложен удобный практический метод для аппроксимации пластового давления в произвольной внутренней точке пласта по данным замеров в соседних скважинах, который в отличие от классических методов Лагранжа и Ньютона не требует построения пространственных прямолинейных осей интерполирования.

Ключевые слова: аппроксимация, пластовое давление, математическое моделирование, обработка данных ГДИ, уравнение Лапласа.

Tolpaev Vladimir A., Ryskalenko Roman A. APPROXIMATION MODELS THE FORMATION PRESSURE ACCORDING TO GAS-DYNAMICS SURVEYS OF WELLS

A convenient practical method for approximating of the formation pressure at an arbitrary point inside the reservoir is offered. The method uses measurements in neighboring wells which, unlike the classical methods of Lagrange and Newton, does not require linear axes of spatial interpolation.

Key words: approximation, the reservoir pressure, mathematical modeling, gas-dynamics surveys of wells, Laplace equation.

Для обработки данных по замерам пластового давления на месторождениях газодобывающих предприятий приходится анализировать таблично заданные функции. В [1] для аппроксимации пластового давления используются классические методы интерполирования Лагранжа, Ньютона, тригонометрического интерполирования, интерполяционные многочлены Стирлинга, Бесселя и методы сплайн-аппроксимации и применяются пространственные прямолинейные оси интерполирования.

Однако если через интересующую точку не удастся провести прямолинейную ось интерполирования, в узлах которой значения измеряемой функции были бы известны, то применение классических методов интерполирования становится затруднительным. В статье предлагается новый простой для практического применения метод аппроксимации пластового давления, который не требует построения пространственных прямолинейных осей интерполирования.

В предлагаемой математической модели пластовый газ считается идеальным, а пласт изотропен. Стационарная плоскопараллельная фильтрация газа подчиняется линейному закону Дарси. Перечисленные ограничения не являются принципиальными. Можно модифицировать предлагаемую математическую модель под свойства реального газа, а пласт рассматривать как криволинейный с переменной толщиной и проницаемостью.

Функция Лейбензона, равная квадрату давления $p^2(x, y)$, для случая стационарной плоскопараллельной линейной фильтрации идеального газа удовлетворяет уравнению [2]:

$$\Delta p^2(x, y) = \frac{\partial^2 p^2(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^2(x, y)}{\partial y^2} = 0. \quad (1)$$

Поэтому задача расчета давления $p(x, y)$ в ограниченной области G с кусочно-гладкой границей ∂G , при условии отсутствия в области G источников и стоков, сводится к решению внутренней краевой задачи для уравнения (1) с граничным условием Дирихле

$$p^2(x, y)|_{(x, y) \in \partial G} = p_0^2(x, y), \quad (2)$$

где $p_0^2(x, y)$ заданная на границе ∂G функция. На практике давление $p_0^2(x, y)$ задается не в каждой точке границы ∂G , а только в точках расположения пьезометрических скважин этой границы.

Поэтому вместо задачи Дирихле (1), (2) приходится решать несколько иную задачу – задачу с дискретным набором граничных точек $M_i(x, y) \in \partial G$ и значениями искомой функции $p_0^2(M_i) = p_{0i}^2$ на множестве заданных точек:

$$p^2(x_i, y_i) = p_{0i}^2, \text{ для } (x_i, y_i) \in \partial G \text{ и } i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Для решения краевой задачи (1), (3) будем исходить из набора известных частных решений уравнения Лапласа $u_k(x, y) = \operatorname{Re}(z^k)$ и $v_k(x, y) = \operatorname{Im}(z^k)$, где z^k – степень комплексного переменного $z = x + iy$. Решение краевой задачи (1), (3) для $2N + 1$ граничной точки будем искать в виде линейной комбинации базисных функций $u_k(x, y)$ и $v_k(x, y)$ с произвольными действительными коэффициентами α_0 , α_k и β_k т. е.

$$p^2(x, y) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^N [\alpha_k \cdot u_k(x, y) + \beta_k \cdot v_k(x, y)]. \quad (4)$$

В формулах для $u_k(x, y)$ и $v_k(x, y)$ координаты x и y можно заменить на разности $x - x_1$ и $y - y_1$, что позволяет снижать порядок появляющейся далее системы линейных алгебраических уравнений на одну единицу.

После подстановки (4) в граничные условия (3) относительно $2N + 1$ произвольных постоянных α_0 , α_k и β_k получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_0 + \sum_{k=1}^N [\alpha_k \cdot u_k(x_i, y_i) + \beta_k \cdot v_k(x_i, y_i)] = p_{0i}^2 \\ i = 1, 2, \dots, (2N + 1) \end{cases} \quad (5)$$

Приведем конкретные примеры расчета пластового давления в треугольной, четырехугольной и пятиугольной области с помощью базисных частных решений $u_k(x, y)$ и $v_k(x, y)$.

1-я модель. Расчет пластового давления в треугольной области. Расчетная область представлена на рисунке. На нем для треугольной области возьмем 3 точки – скважины 7, 142 и 47.

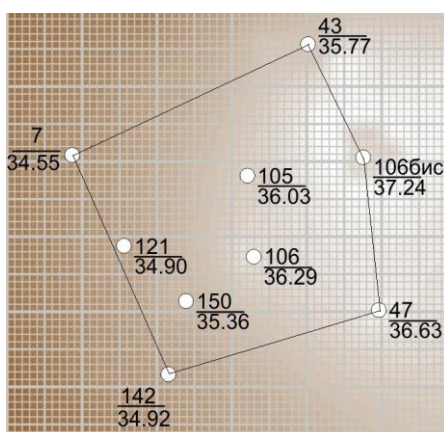


Рис. Участок карты изобар, в числителе – номера скважин, в знаменателе – измеренные давления, в ата

Давление в точке $M(x, y)$ по значениям в трех точках $M_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{1,3}$ будем аппроксимировать функцией (4)

$$p_{пл}(x, y) = \sqrt{p_{пл1}^2 + A \cdot (x - x_1) + B \cdot (y - y_1)}, \quad (7)$$

где A и B являются решением СЛАУ:

$$A \cdot (x_i - x_1) + B \cdot (y_i - y_1) = p_{пл i}^2 - p_{пл1}^2, \quad i = \overline{2,3}. \quad (8)$$

Данную систему можно решить как методом Крамера, так и любым другим. Для примера рассмотрим следующий участок карты изобар хадумского горизонта Северо-Ставропольского ПХГ на момент 11.11.2010, представленный на рисунке 1 (в таблице 1 приведены граничные условия).

Таблица 1

Исходные данные для расчетов

№ п/п	Номер скважины	Безразмерные декартовы координаты		Замеренное давление $P_{пл}$, ата
		x	y	
1	142 (точка M_1)	32	37	34,92
2	47	60	45,5	36,63
3	7	19	66	34,55
4	106 бис	58	66	37,24
5	43	50,5	81	35,77

В качестве вершин треугольной области будем использовать первые три скважины из табл. 1. Результаты вычислений пластового давления по формуле (7) для попавших внутрь области скважин 121, 150 и 106 представлены в таблице 2, где $P_{пл}$ – пластовое давление в скважине, полученное по данным газогидродинамических исследований, $\tilde{P}_{пл}$ – оценка пластового давления, полученная по формуле (7), $\varepsilon = \frac{\tilde{P}_{пл} - P_{пл}}{P_{пл}} \cdot 100\%$ – относительная погрешность вычислений.

Таблица 2

Результаты вычислительного эксперимента

№ п/п	Номер скважины	Безразмерные декартовы координаты		Замеренное давление, $P_{пл}$, ата	Расчетное давление, $\tilde{P}_{пл}$, ата	Относительная погрешность, ε , %
		x	y			
1	106	48,2	52,5	36,29	36,06	0,64
2	150	34,2	46	35,36	35,17	0,54
3	121	26	54	34,90	34,80	0,29

Из табл. 2 следует, что расчеты по формуле (7) дают достаточно точные результаты, при этом погрешность не превышает 1 %.

2-я модель. Расчет пластового давления в выпуклой четырехугольной области. Давление в точке $M(x, y)$ по значениям в четырех точках $M_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{1, 4}$ будем аппроксимировать функцией вида

$$p_{пл} = \sqrt{p_{пл1}^2 + A \cdot (x - x_1) + B \cdot (y - y_1) + C \cdot (x - x_1) \cdot (y - y_1)}. \quad (9)$$

СЛАУ (5) для отыскания неопределенных коэффициентов A , B и C принимает вид:

$$A \cdot (x_i - x_1) + B \cdot (y_i - y_1) + C \cdot (x_i - x_1) \cdot (y_i - y_1) = p_{пл i}^2 - p_{пл1}^2, \quad i = \overline{2, 4}. \quad (10)$$

Результаты вычислений по формуле (10) представлены в табл. 3. В качестве вершин четырехугольной области будем использовать первые три скважины из табл. 1.

Таблица 3

Результаты вычислительного эксперимента

№ п/п	Номер скважины	Безразмерные декартовы координаты		Замеренное давление, $P_{пл}$, ата	Расчетное давление, $\tilde{P}_{пл}$, ата	Относительная погрешность, ε , %
		x	y			
1	105	42,5	63,5	36,03	36,13	-0,28
2	106	48,2	52,5	36,29	36,19	0,27
3	150	34,2	46	35,36	35,22	0,41
					по методике [1] $P_{пл} \cong 35,18$	0,51
4	121	26	54	34,90	34,89	0,09

Для сравнения предлагаемой методики с методикой [1] проведём расчет пластового давления в точке расположения скважины № 150 по [1]. Следуя методике [1], вначале найдём уравнение прямой оси интерполирования по скважинам 142 и 150:

$$11y = 45x - 1033. \quad (11)$$

Затем найдём уравнение прямой, проходящей через скважины 7 и 47:

$$2y = 151 - x. \quad (12)$$

Точка пересечения этих прямых – точка $M_0(36,91; 57,05)$. Перепишем уравнение (12), включая в него третью координату – пластовое давление:

$$\frac{x - 19}{60 - 19} = \frac{y - 66}{45,5 - 66} = \frac{P_{пл} - 34,55}{36,63 - 34,55}. \quad (13)$$

Из (13) можно найти давление $P_{пл}(M_0) \cong 35,49$. Теперь запишем уравнение прямой, проходящей через три точки (скважины 142, 150 и найденную точку M_0) с включением третьей координаты – пластового давления:

$$\frac{x - 32}{36,91 - 32} = \frac{y - 37}{57,05 - 37} = \frac{P_{пл} - 34,92}{35,49 - 34,92}. \quad (14)$$

Подставляя в уравнение (14) координаты скважины 150, найдем методом линейного интерполирования пластовое давление в точке расположения скважины 150. Оно по методике [1] оказывается равным $P_{пл} \cong 35,18$.

3-я модель. Расчет пластового давления в выпуклой пятиугольной области. Давление во внутренних точках по значениям в пяти угловых точках $M_i(x_i, y_i)$, $i = \overline{1, 5}$ будем аппроксимировать функцией вида

$$p_{пл}(x, y) = \sqrt{p_{пл1}^2 + A \cdot (x - x_1) + B \cdot (y - y_1) + C \cdot (x - x_1) \cdot (y - y_1) + D \cdot [(x - x_1)^2 - (y - y_1)^2]}. \quad (15)$$

Коэффициенты A , B , C и D находятся из системы уравнений (5), принимающей вид:

$$A \cdot (x_i - x_1) + B \cdot (y_i - y_1) + C \cdot (x_i - x_1) \cdot (y_i - y_1) + D \cdot [(x_i - x_1)^2 - (y_i - y_1)^2] = p_{пл i}^2 - p_{пл1}^2, \quad i = \overline{2, 5}. \quad (16)$$

Результаты вычислений по формуле (15) представлены в табл. 4.

Таблица 4

Результаты вычислительного эксперимента

№ п/п	Номер скважины	Безразмерные декартовы координаты		Замеренное давление, $P_{пл}$, ата	Расчетное давление, $\tilde{P}_{пл}$, ата	Относительная погрешность, ε , %
		x	y			
1	105	42,5	63,5	36,03	35,63	1,12
2	106	48,2	52,5	36,29	36,00	0,79
3	150	34,2	46	35,36	35,24	0,34
					по [1] с первым выбором осей $P_{пл} \approx 35,18$	0,51
					по [1] со вторым выбором осей $P_{пл} \approx 35,10$	0,74
4	121	26	54	34,90	35,19	-0,84

Для выявления особенностей предлагаемой методики и методики [1], ещё раз проведём расчет пластового давления в точке расположения скважины 150. Во втором расчете оставим ось (12) по скважинам 142 и 150. В качестве второй оси выберем ось, проходящую через скважины 7 и 106 бис. При таком выборе осей пластовое давление $P_{пл} \approx 35,10$. Как видим, смена осей интерполирования, естественно, привела к изменению расчетного значения пластового давления.

Резюмируем сказанное.

1. Сравнительные расчеты пластового давления по данным газогидродинамических исследований скважин по предлагаемым математическим моделям и по методике [1] показывают, что предлагаемые модели лучше, нежели [1], приспособлены к задаче автоматизации расчётов и их применению к построению карты изобар.

2. Погрешность расчетов методики [1] зависит от неоднозначности выбора осей интерполирования, в то время как в предлагаемых моделях граничные узлы расчетной области зафиксированы.

3. Наиболее точные значения дают расчёты по 1-ой и 2-ой моделям, которые и рекомендуются для практического применения.

4. Для повышения точности предложенных математических моделей необходимо ввести учёт неоднородности пласта и, соответственно, вместо уравнения Лапласа (1) применять более сложное уравнение фильтрации для неоднородных пластов [2].

Литература

1. Лаптева Т. И., Мансуров М. Н. Методы приближения функций в решении задач нефтегазового дела. М.: Газпром ВНИИГАЗ, 2011. 286 с.

2. Басниев К. С., Дмитриев Н. М., Розенберг Г. Д. Нефтегазовая гидромеханика. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 480 с.