

ФИЗИКА И МАТЕМАТИКА

УДК 519.5, 519.6

Наац Виктория Игоревна, Ярцева Елена Павловна

ПОСТРОЕНИЕ РЕКУРСИВНО-ИТЕРАЦИОННОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ПРИМЕСЕЙ В АТМОСФЕРЕ

В статье выполняется построение вычислительной схемы решения нестационарного трехмерного параметризованного уравнения переноса примесей в атмосфере на основе метода интегрального представления решения, итерационного алгоритма и схемы покоординатного расщепления.

Ключевые слова: нестационарное трехмерное уравнение переноса примесей в атмосфере, итерационный алгоритм, схема покоординатного расщепления, вычислительный алгоритм, численные исследования.

Naac Viktoria I., Yartseva Elena P.

BUILDING RECURSIVELY ITERATIVE ALGORITHM FOR THE THREE-DIMENSIONAL WAVE EQUATION MIGRATION OF IMPURITY IN ATMOSPHERE

The article builds the computational schemes for solving the nonstationary three-dimensional parameterized equations of transfer of pollutants in the atmosphere on the basis of the method of integral representation of solutions of iterative algorithm and the scheme of splitting.

Key words: non-stationary three-dimensional equation of transfer of pollutants and the atmosphere, the iterative algorithm scheme of coordinate-wise splitting, computational algorithm, numerical studies.

В ранее представленных работах авторов [1–6] изложены результаты построения и исследования итерационных алгоритмов решения нестационарного уравнения переноса для его одномерного варианта в параметризованном виде. В настоящей работе выполняется построение вычислительной схемы решения трехмерного параметризованного уравнения переноса, в которой итерационные алгоритмы «встраиваются» в схему его покоординатного расщепления. Уравнение переноса примесей, для случая трех пространственных переменных, с учетом условия неразрывности, имеет вид [1]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial q(P,t)}{\partial t} + \alpha(t)q(P,t) + V_x(P,t) \cdot \frac{\partial q(P,t)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x(P,t) \cdot \frac{\partial q(P,t)}{\partial x} \right) + \\ & + V_y(P,t) \cdot \frac{\partial q(P,t)}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y(P,t) \cdot \frac{\partial q(P,t)}{\partial y} \right) + V_z(P,t) \cdot \frac{\partial q(P,t)}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z(P,t) \cdot \frac{\partial q(P,t)}{\partial z} \right) = S(P,t), \end{aligned} \quad (1)$$

в котором $P = P(x, y, z)$, $P \in \Omega \subset R_3$, $t \in [0, T]$, начальные условия $q(P, t)|_{t=0} = q(P, 0) = q_0(P)$ для $P \in \Omega$, граничные условия $q(P, t) = \bar{q}(P, t)$ для $P \in \bar{\Omega}$, где $q(P, 0) = q_0(P)$ и $\bar{q}(P, t)$ – заданные функции, а $\bar{\Omega}$ – граница области Ω . В уравнении (1) $q(P, t)$ – концентрация примесей, имеющих в точке пространства P в момент времени t ; $\alpha(t)$ – коэффициент, характеризующий степень вывода или приноса примесей в данный объем за счет химических или других процессов; $V_x(P, t)$, $V_y(P, t)$, $V_z(P, t)$ – компоненты вектора скорости ветра; $K_x(P, t)$, $K_y(P, t)$, $K_z(P, t)$ – турбулентность, характеризующая коэффициентом турбулентной диффузии, $S(P, t)$ – источник примесей.

Вычислительная схема решения трехмерных задач переноса основана на методах покоординатного расщепления. Это позволяет сложные многомерные задачи сводить к последовательности взаимосвязанных более простых одномерных подзадач, тем самым существенно снизить сложность алгоритмов и применять технологию параллельных вычислений для их реализации на ЭВМ. Алгоритм расщепления и его обоснование подробно изложены в [1], согласно которому нестационарную модель (1) с начальными и граничными условиями можно представить в виде трех последовательно решаемых во времени подзадач, соответствующих переносу субстанции вдоль координатных осей $\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{Oy}$, $\overrightarrow{Oz}$ соответственно, в пределах элементарного временного интервала $[t_j, t_{j+1}]$. Разработка

алгоритма начинается с построения параметризованной модели и включает в себя этапы нормирования переменных, нормирования функций исходных данных, нормирования начальных и граничных условий, вычисления нормировочных коэффициентов, что подробно описано в работах [1,6]. Нормировочные коэффициенты модели имеют вид:

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}(\bar{t}) &= \alpha(\bar{t}) \cdot T, \quad \bar{\beta}_z(\bar{t}) = \frac{V_z^{(0)}(\bar{t}) \cdot T}{Z}, \quad \bar{\theta}_z(\bar{t}) = \frac{K_z^{(0)}(\bar{t}) \cdot T}{Z^2}, \quad \bar{\xi}_1(\bar{t}) = \frac{T \cdot S_1^{(0)}(\bar{t})}{q_1^{(0)}}, \quad \bar{\beta}_x(\bar{t}) = \frac{V_x^{(0)}(\bar{t}) \cdot T}{X}, \quad \bar{\theta}_x(\bar{t}) = \frac{K_x^{(0)}(\bar{t}) \cdot T}{X^2}, \\ \bar{\xi}_2(\bar{t}) &= \frac{T \cdot S_2^{(0)}(\bar{t})}{q_2^{(0)}}, \quad \bar{\beta}_y(\bar{t}) = \frac{V_y^{(0)}(\bar{t}) \cdot T}{Y}, \quad \bar{\theta}_y(\bar{t}) = \frac{K_y^{(0)}(\bar{t}) \cdot T}{Y^2}, \quad \bar{\xi}_3(\bar{t}) = \frac{T \cdot S_3^{(0)}(\bar{t})}{q_3^{(0)}}, \quad S_j(P, \bar{t}) = \omega_j \cdot S(P, \bar{t}), \quad j = \overline{1, 3}.\end{aligned}$$

В результате перечисленных процедур формируется параметризованная модель уравнения (1), которое далее на основе схемы расщепления преобразуется в систему трех последовательно решаемых подзадач:

Задача I:

$$\begin{aligned}\bar{t}_j \leq \bar{t} \leq \bar{t}_{j+1}, \quad \frac{\partial \bar{q}_1}{\partial \bar{t}} + \bar{\alpha} \bar{q}_1 + \bar{\beta}_z \cdot \bar{V}_z \cdot \frac{\partial \bar{q}_1}{\partial \bar{z}} - \bar{\theta}_z \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\bar{K}_z \cdot \frac{\partial \bar{q}_1}{\partial \bar{z}} \right) &= \bar{\xi}_1 \cdot \bar{S}_1(\bar{P}_1, \bar{t}), \\ \bar{q}_1(\bar{P}_1, 0) &= \bar{q}_0(\bar{P}_1), \text{ если } \bar{t} = 0, \quad \bar{q}_1(\bar{P}, \bar{t}_j) = \bar{q}_3(\bar{P}, \bar{t}_{j+1}), \text{ если } \bar{t} > 0, \\ \bar{q}_1(\bar{P}_4, \bar{t}) &= \bar{q}_4(\bar{P}_4, \bar{t}), \quad \bar{q}_1(\bar{P}_5, \bar{t}) = \bar{q}_5(\bar{P}_5, \bar{t});\end{aligned}\tag{2}$$

Задача II:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{q}_2}{\partial \bar{t}} + \bar{\beta}_x \cdot \bar{V}_x \cdot \frac{\partial \bar{q}_2}{\partial \bar{x}} - \bar{\theta}_x \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\bar{K}_x \cdot \frac{\partial \bar{q}_2}{\partial \bar{x}} \right) &= \bar{\xi}_2 \cdot \bar{S}_2(\bar{P}_2, \bar{t}), \\ \bar{q}_2(\bar{P}, \bar{t}_j) &= \bar{q}_1(\bar{P}, \bar{t}_{j+1}), \quad \bar{q}_2(\bar{P}_6, \bar{t}) = \bar{q}_6(\bar{P}_6, \bar{t}), \quad \bar{q}_2(\bar{P}_7, \bar{t}) = \bar{q}_6(\bar{P}_7, \bar{t});\end{aligned}\tag{3}$$

Задача III:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{q}_3}{\partial \bar{t}} + \bar{\beta}_y \cdot \bar{V}_y \cdot \frac{\partial \bar{q}_3}{\partial \bar{y}} - \bar{\theta}_y \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\bar{K}_y \cdot \frac{\partial \bar{q}_3}{\partial \bar{y}} \right) &= \bar{\xi}_3 \cdot \bar{S}_3(\bar{P}_3, \bar{t}), \\ \bar{q}_3(\bar{P}, \bar{t}_j) &= \bar{q}_2(\bar{P}, \bar{t}_{j+1}), \quad \bar{q}_3(\bar{P}_8, \bar{t}) = \bar{q}_8(\bar{P}_8, \bar{t}), \quad \bar{q}_3(\bar{P}_9, \bar{t}) = \bar{q}_9(\bar{P}_9, \bar{t}).\end{aligned}\tag{4}$$

Очевидно, что каждое уравнение в схеме (2)–(4) является одномерным с соответствующими начальными и граничными условиями, и к нему можно применить итерационную вычислительную процедуру, подробно изложенную и обоснованную в предшествующих работах авторов [1–6]. Итак, для первого уравнения (2) соответствующая вычислительная схема получит представление:

$$\begin{aligned}t_j \leq t' \leq t \leq t_{j+1}, \quad P_1 &= P(z|x, y), \\ q_1(P_1, t) &= \phi_1(P_1, t) - \int_{t_j}^t \tilde{K}(t, t') \psi_1(P_1, t') dt', \\ \tilde{K}(t, t') &= \exp \left\{ - \int_{t'}^t \alpha(t'') dt'' \right\}, \\ \psi_1(P_1, t') &= \left(\beta_z(t') V_z(P_1, t') - \theta_z(t') \frac{\partial K_z(P_1, t')}{\partial z} \right) \cdot \frac{\partial q_1(P_1, t')}{\partial z} - \theta_z(t') K_z(P_1, t') \frac{\partial^2 q_1(P_1, t')}{\partial z^2}, \\ \phi_1(P_1, t) &= q_1(P_1, t_j) \cdot \exp \left\{ - \int_{t_j}^t \alpha(t') dt' \right\} + \int_{t_j}^t \xi_1(t') S_1(P_1, t') \tilde{K}(t, t') dt', \\ q_1(P_1, t_j) &= q_0(P_1), \text{ если } j = 0, \\ q_1(P, t_j) &= q_3(P, t_j), \text{ если } j > 0, \text{ где } P = P(x, y, z), \\ q_1(z_0|x, y, t) &= \bar{q}_4(0|x, y, t), \quad q_1(z_L|x, y, t) = \bar{q}_5(1|x, y, t).\end{aligned}\tag{5}$$

Соответствующий итерационный алгоритм состоит в следующем:

$$q_1^{(v)}(P_1, t) = \phi_1(P_1, t) - \int_{t_j}^t \tilde{K}(t, t') \psi_1^{(v-1)}(P_1, t', q_1^{(v-1)}(P_1, t')) dt',$$

$$\psi_1^{(\nu-1)}(P_1, t') = \left(\beta_z(t') V_z(P_1, t') - \theta_z(t') \frac{\partial K_z(P_1, t')}{\partial z} \right) \cdot \frac{\partial q_1^{(\nu-1)}(P_1, t')}{\partial z} - \theta_z(t') K_z(P_1, t') \frac{\partial^2 q_1^{(\nu-1)}(P_1, t')}{\partial z^2},$$

$$q_1^{(0)} = \varphi_1(P_1, t), \nu = 0, 1, 2, \dots \text{ если } \left| q_1^{(\nu)}(P_1, t) - q_1^{(\nu-1)}(P_1, t) \right| \leq \varepsilon,$$

$$\text{то } q_1(P_1, t) = q_1^{(\nu)}(P_1, t).$$

Для второго уравнения (3) аналогичные построения приводят нас к следующему вычислительному алгоритму:

$$t_j \leq t' \leq t \leq t_{j+1},$$

$$P_2 = P(x|y, z),$$

$$q_2(P_2, t) = \varphi_2(P_2, t) - \int_{t_j}^t \psi_2(P_2, t') dt', \quad (6)$$

$$\psi_2(P_2, t') = \left(\beta_x(t') V_x(P_2, t') - \theta_x(t') \frac{\partial K_x(P_2, t')}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial q_2(P_2, t')}{\partial x} - \theta_x(t') K_x(P_2, t') \frac{\partial^2 q_2(P_2, t')}{\partial x^2},$$

$$\varphi_2(P_2, t) = q_2(P_2, t_j) + \int_{t_j}^t \xi_2(t') S_2(P_2, t') dt',$$

$$q_2(P, t_j) = q_1(P, t_{j+1}), \text{ где } P = P(x, y, z),$$

$$q_2(x_0|y, z, t) = \bar{q}_6(0|y, z, t), \quad q_2(t, P_2(x_M|y, z, t)) = \bar{q}_7(1|y, z, t).$$

Итерационная схема имеет вид:

$$q_2^{(\nu)}(P_2, t) = \varphi_2(P_2, t) - \int_{t_j}^t \psi_2^{(\nu-1)}(P_2, t', q_2^{(\nu-1)}(P_2, t')) dt',$$

$$\psi_2^{(\nu-1)}(P_2, t') = \left(\beta_x(t') V_x(P_2, t') - \theta_x(t') \frac{\partial K_x(P_2, t')}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial q_2^{(\nu-1)}(P_2, t')}{\partial x} - \theta_x(t') K_x(P_2, t') \frac{\partial^2 q_2^{(\nu-1)}(P_2, t')}{\partial x^2},$$

$$q_2^{(0)} = \varphi_2(P_2, t), \nu = 0, 1, 2, \dots, \text{ если } \left| q_2^{(\nu)}(P_2, t) - q_2^{(\nu-1)}(P_2, t) \right| \leq \varepsilon,$$

$$\text{то } q_2(P_2, t) = q_2^{(\nu)}(P_2, t).$$

Для третьего уравнения (4) получим вычислительный алгоритм в виде:

$$t_j \leq t' \leq t \leq t_{j+1}, \quad P_3 = P(y|x, z),$$

$$q_3(P_3, t) = \varphi_3(P_3, t) - \int_{t_j}^t \psi_3(P_3, t') dt', \quad (7)$$

$$\psi_3(P_3, t') = \left(\beta_y(t') V_y(P_3, t') - \theta_y(t') \frac{\partial K_y(P_3, t')}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial q_3(P_3, t')}{\partial y} - \theta_y(t') K_y(P_3, t') \frac{\partial^2 q_3(P_3, t')}{\partial y^2},$$

$$\varphi_3(P_3, t) = q_3(P_3, t_j) + \int_{t_j}^t \xi_3(t') S_3(P_3, t') dt',$$

$$q_3(P, t_j) = q_2(P, t_{j+1}), \text{ где } P = P(x, y, z),$$

$$q_3(y_0|x, z, t) = \bar{q}_8(0|x, z, t), \quad q_3(y_K|x, z, t) = \bar{q}_9(1|x, z, t).$$

Итерационная схема получит представление:

$$q_3^{(\nu)}(P_3, t) = \varphi_3(P_3, t) - \int_{t_j}^t \psi_3^{(\nu-1)}(P_3, t', q_3^{(\nu-1)}(P_3, t')) dt',$$

$$\psi_3^{(\nu-1)}(P_3, t') = \left(\beta_y(t') V_y(P_3, t') - \theta_y(t') \frac{\partial K_y(P_3, t')}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial q_3^{(\nu-1)}(P_3, t')}{\partial y} - \theta_y(t') K_y(P_3, t') \frac{\partial^2 q_3^{(\nu-1)}(P_3, t')}{\partial y^2},$$

$$q_3^{(0)} = \varphi_3(P_3, t), \nu = 0, 1, 2, \dots, \text{ если } |q_3^{(\nu)}(P_3, t) - q_3^{(\nu-1)}(P_3, t)| \leq \varepsilon, \text{ то } q_3(P_3, t) = q_3^{(\nu)}(P_3, t).$$

Заменяя в вычислительной схеме (5) – (7) все функции их сеточными аналогами и ставя в соответствие точке пространства $P = P(x, y, z)$ точку $P(x_m, y_k, z_l)$ на сетке $\{x_m, y_k, z_l\}$, $m = \overline{0, M}$, $k = \overline{0, K}$, $l = \overline{0, L}$ для каждого фиксированного момента времени t_j , $j = \overline{0, N}$, приходим к следующему вычислительному алгоритму решения нестационарного уравнения переноса для случая трех пространственных переменных:

- 1) $j = \overline{0, N-1}$;
- 2) $t_j \leq t_r \leq t_i \leq t_{j+1}$,

$$q_1^{(\nu)}(x_m, y_k, z_l, t_i) = \phi_1(x_m, y_k, z_l, t_i) - \sum_{r=j}^i \omega_r \cdot \tilde{K}(t_i, t_r) \cdot \psi_1^{(\nu-1)}(x_m, y_k, z_l, t_r) \cdot \Delta t,$$

$$\tilde{K}(t_i, t_r) = \exp \left\{ - \sum_{g=r}^i \omega_g \cdot \alpha(t_g) \cdot \Delta t \right\},$$

$$\psi_1^{(\nu-1)}(x_m, y_k, z_l, t_r) = \left[\beta_z(t_r) V_z(x_m, y_k, z_l, t_r) - \theta_z(t_r) \cdot \frac{K_z(x_m, y_k, z_l, t_r) - K_z(x_m, y_k, z_{l-1}, t_r)}{\Delta z} \right] \times$$

$$\times \left(\frac{q_1^{(\nu-1)}(x_m, y_k, z_l, t_r) - q_1^{(\nu-1)}(x_m, y_k, z_{l-1}, t_r)}{\Delta z} \right) - \theta_z(t) K_z(x_m, y_k, z_l, t_r) \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{q_1^{(\nu-1)}(x_m, y_k, z_{l+1}, t_r) - 2q_1^{(\nu-1)}(x_m, y_k, z_l, t_r) + q_1^{(\nu-1)}(x_m, y_k, z_{l-1}, t_r)}{(\Delta z)^2} \right),$$

$$\varphi_1(x_m, y_k, z_l, t_i) = q_1(x_m, y_k, z_l, t_j) \cdot \exp \left\{ - \sum_{r=j}^i \omega_r \cdot \alpha(t_r) \cdot \Delta t \right\} +$$

$$+ \sum_{r=j}^i \omega_r \cdot \xi_1(t_r) \cdot S_1(x_m, y_k, z_l, t_r) \cdot \tilde{K}(t_i, t_r) \cdot \Delta t,$$

$$i = \overline{j, j+1}, m = \overline{0, M}, k = \overline{0, K}, l = \overline{1, L-1},$$

$$q_1^{(0)}(x_m, y_k, z_l, t_i) = \varphi_1(x_m, y_k, z_l, t_i), \nu = 0, 1, 2, \dots,$$

$$q_1(x_m, y_k, z_l, t_j) = q_0(x_m, y_k, z_l), \text{ если } j = 0, m = \overline{0, M}, k = \overline{0, K}, l = \overline{0, L};$$

$$q_1(x_m, y_k, z_l, t_j) = q_3(x_m, y_k, z_l, t_j), \text{ если } j > 0, m = \overline{0, M}, k = \overline{0, K}, l = \overline{0, L};$$

$$q_1(x_m, y_k, z_0, t_i) = \bar{q}_4(x_m, y_k, 0, t_i),$$

$$q_1(x_m, y_k, z_L, t_i) = \bar{q}_5(x_m, y_k, 1, t_i), m = \overline{0, M}, k = \overline{0, K};$$

$$\text{если } |q_1^{(\nu)}(x_m, y_k, z_l, t_i) - q_1^{(\nu-1)}(x_m, y_k, z_l, t_i)| \leq \varepsilon,$$

$$\text{то } q_1(x_m, y_k, z_l, t_i) = q_1^{(\nu)}(x_m, y_k, z_l, t_i).$$

- 3) $q_2(x_m, y_k, z_l, t_j) = q_1(x_m, y_k, z_l, t_{j+1}), m = \overline{0, M}, k = \overline{0, K}, l = \overline{0, L};$
- 4) $t_j \leq t_r \leq t_i \leq t_{j+1},$

$$q_2^{(\nu)}(x_m, y_k, z_l, t_i) = \varphi_2(x_m, y_k, z_l, t_i) - \sum_{r=j}^i \omega_r \psi_2^{(\nu-1)}(x_m, y_k, z_l, t_r) \cdot \Delta t,$$

$$\psi_2^{(v-1)}(x_m, y_k, z_l, t_r) = \left[\beta_x(t_r) V_x(x_m, y_k, z_l, t_r) - \theta_x(t_r) \cdot \frac{K_x(x_m, y_k, z_l, t_r) - K_x(x_{m-1}, y_k, z_l, t_r)}{\Delta x} \right] \times$$

$$\times \left(\frac{q_2^{(v-1)}(x_m, y_k, z_l, t_r) - q_2^{(v-1)}(x_{m-1}, y_k, z_l, t_r)}{\Delta x} \right) -$$

$$- \theta_x(t_r) K_x(x_m, y_k, z_l, t_r) \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{q_2^{(v-1)}(x_{m+1}, y_k, z_l, t_r) - 2q_2^{(v-1)}(x_m, y_k, z_l, t_r) + q_2^{(v-1)}(x_{m-1}, y_k, z_l, t_r)}{(\Delta x)^2} \right),$$

$$\varphi_2(x_m, y_k, z_l, t_i) = q_2(x_m, y_k, z_l, t_j) + \sum_{r=j}^i \omega_r \cdot \xi_2(t_r) \cdot S_2(x_m, y_k, z_l, t_r) \cdot \Delta t,$$

$$i = \overline{j, j+1}, l = \overline{0, L}, k = \overline{0, K}, m = \overline{1, M-1},$$

$$q_2^{(0)}(x_m, y_k, z_l, t_i) = \varphi_2(x_m, y_k, z_l, t_i), v = 0, 1, 2, \dots,$$

$$q_2(x_0, y_k, z_l, t_i) = \bar{q}_6(0, y_k, z_l, t_i),$$

$$q_2(x_M, y_k, z_l, t_i) = \bar{q}_7(1, y_k, z_l, t_i), l = \overline{0, L}, k = \overline{0, K};$$

$$\text{если } |q_2^{(v)}(x_m, y_k, z_l, t_i) - q_2^{(v-1)}(x_m, y_k, z_l, t_i)| \leq \varepsilon,$$

$$\text{то } q_2(x_m, y_k, z_l, t_i) = q_2^{(v)}(x_m, y_k, z_l, t_i).$$

$$5) q_3(x_m, y_k, z_l, t_j) = q_2(x_m, y_k, z_l, t_{j+1}), m = \overline{0, M}, k = \overline{0, K}, l = \overline{0, L};$$

$$6) t_j \leq t_r \leq t_i \leq t_{j+1},$$

$$q_3^{(v)}(x_m, y_k, z_l, t_i) = \varphi_3(x_m, y_k, z_l, t_i) - \sum_{r=j}^i \omega_r \psi_3^{(v-1)}(x_m, y_k, z_l, t_r) \cdot \Delta t,$$

$$\psi_3^{(v-1)}(x_m, y_k, z_l, t_r) = \left[\beta_y(t_r) V_y(x_m, y_k, z_l, t_r) - \theta_y(t_r) \cdot \frac{K_y(x_m, y_k, z_l, t_r) - K_y(x_m, y_{k-1}, z_l, t_r)}{\Delta y} \right] \times$$

$$\times \left(\frac{q_3^{(v-1)}(x_m, y_k, z_l, t_r) - q_3^{(v-1)}(x_m, y_{k-1}, z_l, t_r)}{\Delta y} \right) - \theta_y(t_r) K_y(x_m, y_k, z_l, t_r) \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{q_3^{(v-1)}(x_m, y_{k+1}, z_l, t_r) - 2q_3^{(v-1)}(x_m, y_k, z_l, t_r) + q_3^{(v-1)}(x_m, y_{k-1}, z_l, t_r)}{(\Delta y)^2} \right),$$

$$\varphi_3(x_m, y_k, z_l, t_i) = q_3(x_m, y_k, z_l, t_j) + \sum_{r=j}^i \omega_r \cdot \xi_3(t_r) \cdot S_3(x_m, y_k, z_l, t_r) \cdot \Delta t,$$

$$i = \overline{j, j+1}, l = \overline{0, L}, m = \overline{0, M}, k = \overline{1, K-1},$$

$$q_3^{(0)}(x_m, y_k, z_l, t_i) = \varphi_3(x_m, y_k, z_l, t_i), v = 0, 1, 2, \dots,$$

$$q_3(x_m, y_0, z_l, t_i) = \bar{q}_8(x_m, 0, z_l, t_i),$$

$$q_3(x_m, y_K, z_l, t_i) = \bar{q}_9(x_m, 1, z_l, t_i), l = \overline{0, L}, m = \overline{0, M};$$

$$\text{если } |q_3^{(v)}(x_m, y_k, z_l, t_i) - q_3^{(v-1)}(x_m, y_k, z_l, t_i)| \leq \varepsilon,$$

$$\text{то } q_3(x_m, y_k, z_l, t_i) = q_3^{(v)}(x_m, y_k, z_l, t_i).$$

$$7) j = j+1;$$

8) если $j \leq N-1$, то $q_1(x_m, y_k, z_l, t_j) = q_3(x_m, y_k, z_l, t_j)$, $m = \overline{0, M}$, $k = \overline{0, K}$, $l = \overline{0, L}$;
перейти на шаг 2; иначе – перейти на шаг 9;

$$9) \text{ если } j = N, \text{ то } q(x_m, y_k, z_l, t_j) = q_3(x_m, y_k, z_l, t_j), m = \overline{0, M}, k = \overline{0, K}, l = \overline{0, L}.$$

Для построения и реализации вычислительного эксперимента разработан специальный тестовый пример, в котором генерируются значения (массивы) исходных данных, а также точное решение $\hat{q}_T(\hat{t}, P)$ (поле концентрации примесей) [1]. Дальнейшая реализация вычислительного алгоритма проводится в предположении о том, что распределение $\hat{q}(\hat{t}, P)$ не известно и должно определяться в ходе вычислений при известных исходных данных, которое обозначено $\hat{q}_M(\hat{t}, P)$. Точность вычислений оценивается значением величины отклонения приближенного решения $\hat{q}_M(\hat{t}, P)$ от точного $\hat{q}(\hat{t}, P)$ по формуле $\sigma = |\hat{q}_T(\hat{t}, P) - \hat{q}_M(\hat{t}, P)|$. Исследование сходимости и устойчивости данной вычислительной модели является следующим этапом настоящей работы.

Литература

1. Наац В. И., Наац И. Э. Математические модели и численные методы в задачах экологического мониторинга атмосферы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 328 с.
2. Наац В. И., Ярцева Е. П. Разработка качественной модели и итерационного алгоритма для оценки концентрации загрязняющих примесей в атмосфере // Вестник СКФУ. Научный журнал. 2013. № 1 (34). С. 15–21.
3. Наац В. И., Ярцева Е. П. Качественная модель оценки концентрации аэрозольных примесей в атмосфере, основанная на интегральном представлении решения уравнения турбулентной диффузии // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2012. № 1. С. 38–43.
4. Наац В. И., Ярцева Е. П. Вычислительный алгоритм в модели переноса примесей в турбулентной атмосфере на основе нестационарного трехмерного уравнения. // Моделирование и анализ информационных систем: Труды международной научной конференции. Ярославль, 6–7 февраля 2012 г. Ярославль: ЯрГУ, 2012. С. 140–142.
5. Наац В. И., Ярцева Е. П. Численное исследование рекурсивных и итерационных алгоритмов в задаче моделирования переноса аэрозолей в атмосфере // Вестник СГУ. Выпуск 75(4), 2011. С. 44–50.
6. Наац В. И., Ярцева Е. П. Построение и исследование вычислительного алгоритма для параметризованного нестационарного уравнения примесей в атмосфере. Современные достижения в науке и образовании: математика и информатика: Материалы международной научно-практической конференции, Архангельск, 1–5 февраля 2010 г. // Федер. агентство по образованию, Ком. по науке и проф. образованию Арханг. обл., Помор. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. Архангельск: КИРА, 2010. С. 561–562.

УДК 622.276.5+51-7

Толпаев Владимир Александрович, Рыскаленко Роман Андреевич

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ ПЛАСТОВОГО ДАВЛЕНИЯ ПО ДАННЫМ ГАЗОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ СКВАЖИН

В статье предложен удобный практический метод для аппроксимации пластового давления в произвольной внутренней точке пласта по данным замеров в соседних скважинах, который в отличие от классических методов Лагранжа и Ньютона не требует построения пространственных прямолинейных осей интерполирования.

Ключевые слова: аппроксимация, пластовое давление, математическое моделирование, обработка данных ГДИ, уравнение Лапласа.

Tolpaev Vladimir A., Ryskalenko Roman A. APPROXIMATION MODELS THE FORMATION PRESSURE ACCORDING TO GAS-DYNAMICS SURVEYS OF WELLS

A convenient practical method for approximating of the formation pressure at an arbitrary point inside the reservoir is offered. The method uses measurements in neighboring wells which, unlike the classical methods of Lagrange and Newton, does not require linear axes of spatial interpolation.

Key words: approximation, the reservoir pressure, mathematical modeling, gas-dynamics surveys of wells, Laplace equation.

Для обработки данных по замерам пластового давления на месторождениях газодобывающих предприятий приходится анализировать таблично заданные функции. В [1] для аппроксимации пластового давления используются классические методы интерполирования Лагранжа, Ньютона, тригонометрического интерполирования, интерполяционные многочлены Стирлинга, Бесселя и методы сплайн-аппроксимации и применяются пространственные прямолинейные оси интерполирования.