

Примем, что расходы растут квадратично [2], то есть $S_1 = \delta_1 M_1 - \alpha (\delta_1 M_1)^2$, $S_2 = \delta_2 M_2 - \alpha (\delta_2 M_2)^2$, где α – феноменологический коэффициент. В оптимальном режиме работы предприятия [2] сумма этих расходов должна быть максимальна. Это имеет место при $\delta_1 M_1 = \frac{1}{2}\alpha$, и тогда обе суммы равны $S_1 = S_2 = S = \frac{1}{4}\alpha$. Тогда система (1) приведет к виду

$$\begin{aligned}\frac{dM_1}{dt} &= M_1 - bM_1M_2 - bM_1^2 - k'_1 + S, \\ \frac{dM_2}{dt} &= M_2 - bM_1M_2 - bM_2^2 - k'_2 + S.\end{aligned}\quad (7)$$

В случае $S < k_1$ и $S < k_2$ качественные свойства модели (7) остаются такими же, как и для системы (1). Однако, при $S > k_1$ и $S > k_2$ ситуация меняется, возникает устойчивое стационарное состояние [2]:

$$M_1 = \frac{S - k_1}{b(2S - k_1 - k_2)}, \quad M_2 = \frac{S - k_2}{b(2S - k_1 - k_2)},$$

что и следовало ожидать, сравнивая модель (7) с моделью (4), рассмотренной выше.

Таким образом, в этом случае возможно сосуществование конкурентов. Смысл этого в том, что благодаря рекламе каждая из фирм создаёт свою нишу, в которой потребители предпочитают приобретать товар именно этой фирмы. Фактически конкуренты сосуществуют независимо.

Литература

1. Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса: Новый диалог человека с природой. М.: УРСС, 2003. 312 с.
2. Чернавский Д. С., Щербаков А. В., Зульпукаров М. М. Модель конкуренции. М.: Препринт ИПМ. 2006. № 64.
3. Романов М. Ф., Федоров М. П. Математические модели в экологии. СПб.: Иван Федоров, 2003. 240 с.
4. Свирижев Ю. М., Пасеков В. П. Основы математической генетики. М.: Наука, 1978. 272 с.

УДК 517.95

Новикова Ольга Викторовна

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В статье ставится задача поиска автомодельных решений нелинейного уравнения в частных производных на комплекснозначную функцию. Вначале рассмотрена система уравнений, эквивалентная исследуемой модели, продемонстрировано её преобразование к виду, допускающему получение решений такого типа. Автор подробно описывает каждый этап анализа и в результате приходит к решению поставленной задачи.

Ключевые слова: автомодельные решения, нелинейное уравнение, система уравнений, производная функции, произвольная степень, параметр.

Novikova Olga V.

THE AUTOMODEL SOLUTIONS OF COMPLEX VALUED NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION IN PARTIAL DERIVATIVES

The aim of this article is to find the automodel solutions of nonlinear equation in partial derivatives with the complex valued function. The system of equations, which equivalent to the observable model, is examined at the beginning of the article. The modification of the system to the type, which allows to get the automodel solutions, is shown. The author describes every step of the analysis in detail. As a result, he achieves his aim.

Key words: automodel solutions, nonlinear equation, system of equations, derivative of function, coefficient, any degree, parameter.

Дадим определение автомодельных решений [1]. Автомодельными называются решения уравнения $F(x, t, \omega, \omega_x, \omega_t, \omega_{xx}, \omega_{xt}, \omega_{tt} \dots) = 0$ вида $w(x, t) = t^\alpha U(\zeta)$, $\zeta = xt^\beta$, α, β – параметры.

Исследуемое в данной статье комплекснозначное нелинейное уравнение в частных производных имеет вид:

$$\bar{p}_t - ip_{xx} + 2ip(p^2 + \bar{p}^2) = 0. \quad (1)$$

Для нахождения автомодельных решений воспользуемся системой дифференциальных уравнений на две действительные функции, эквивалентной исходному уравнению [2]:

$$\begin{aligned} u_t + v_{xx} - 4v(u^2 - v^2) &= 0, \\ v_t + u_{xx} - 4u(u^2 - v^2) &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $u(x, t) = \operatorname{Re} p(x, t)$, $v(x, t) = \operatorname{Im} p(x, t)$.

ЛЕММА 1. Система уравнений в частных производных (2) в результате некоторых замен и преобразований примет следующий вид:

$$q = \frac{w_t + w_{xx}}{4w^2}, \quad \left(\frac{w_t + w_{xx}}{w} \right)_t - \left(\left(\frac{w_t + w_{xx}}{w} \right)_x - \frac{w_t + w_{xx}}{w} \frac{2w_x}{w} \right)_x = 0,$$

где $u(x, t) = \frac{1}{2}(w(x, t) + q(x, t))$, $v(x, t) = \frac{1}{2}(w(x, t) - q(x, t))$.

Доказательство. Умножим первое уравнение системы (2) на u , второе – на $-v$ и сложим

$$\begin{aligned} u_t + v_{xx} - 4v(u^2 - v^2) &= 0, \\ uu_t - vv_t + uv_{xx} - vu_{xx} &= 0. \end{aligned}$$

Если во втором уравнении полученной системы добавить и вычесть $u_x v_x$ и сгруппировать слагаемые, то его можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{2}(u^2 - v^2)_t + (uv_x - vu_x)_x = 0. \quad (3)$$

Сумма двух уравнений системы (2) даст равенство

$$(u + v)_t + (u + v)_{xx} - 4(u + v)(u^2 - v^2) = 0. \quad (4)$$

Объединив уравнения (3) и (4) и расписав в них разность квадратов, получим систему, эквивалентную (2)

$$\begin{aligned} (u + v)_t + (u + v)_{xx} - 4(u + v)^2(u - v) &= 0, \\ \frac{1}{2}((u - v)(u + v))_t + (uv_x - vu_x)_x &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть $u + v = w$, $u - v = q$, тогда $u = \frac{1}{2}(w + q)$, $v = \frac{1}{2}(w - q)$, $uv_x - vu_x = \frac{1}{2}(qw_x - wq_x)$. С учетом введенных обозначений запишем систему (5):

$$\begin{aligned} w_t + w_{xx} - 4w^2 q &= 0, \\ (wq)_t - \left(\left(\frac{q}{w} \right)_x w^2 \right)_x &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Выразив из первого уравнения этой системы q и подставив во второе уравнение системы, а затем, выполнив в нем некоторые преобразования, придем к следующему:

$$q = \frac{w_t + w_{xx}}{4w^2}, \quad \left(\frac{w_t + w_{xx}}{w} \right)_t - \left(\left(\frac{w_t + w_{xx}}{w} \right)_x - \frac{w_t + w_{xx}}{w} \frac{2w_x}{w} \right)_x = 0. \quad (7)$$

Что и требовалось доказать.

ЛЕММА 2. Второе уравнение системы (7) с помощью замены $w(x, t) = e^{f(x, t)}$ можно записать в виде системы уравнений:

$$\begin{aligned} f_t + f_{xx} + f_x^2 &= F, \\ F_t - F_{xx} + 2(f_x F)_x &= 0. \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $w = e^f$, тогда $w_t = f_t e^f$, $w_x = f_x e^f$, $w_{xx} = f_{xx} e^f + f_x^2 e^f$ и второе уравнение системы (7) примет вид:

$$\left(f_t + f_{xx} + f_x^2\right)_t - \left(\left(f_t + f_{xx} + f_x^2\right)_x - 2f_x \left(f_t + f_{xx} + f_x^2\right)\right)_x = 0$$

Перепишем уравнение в виде системы двух уравнений, переобозначив трехчлен в скобках

$$\begin{aligned} f_t + f_{xx} + f_x^2 &= F, \\ F_t - F_{xx} + 2(f_x F)_x &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Что и требовалось доказать.

Исследуем трехчлен $f_t + f_{xx} + f_x^2$ на возможность преобразований координат для получения автомодельного решения. Пусть $\xi = x^\alpha t^\beta$ и $f = x^\gamma f_1(\xi)$, α, β, γ – произвольные постоянные, определение которых будет дано в ходе построения решения, тогда частные производные определяются по формулам:

$$\begin{aligned} f_x &= \gamma x^{\gamma-1} f_1(\xi) + \alpha x^{\alpha+\gamma-1} t^\beta f_1'(\xi), \\ f_{xx} &= \gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2} f_1(\xi) + \alpha(\alpha+2\gamma-1)t^\beta x^{\alpha+\gamma-2} f_1'(\xi) + \alpha^2 t^{2\beta} x^{2\alpha+\gamma-2} f_1''(\xi), \\ f_t &= \beta x^{\alpha+\gamma} t^{\beta-1} f_1'(\xi). \end{aligned}$$

Выполнив подстановку значений частных производных в исследуемый трехчлен, имеем

$$\begin{aligned} &\beta x^{\alpha+\gamma} t^{\beta-1} f_1'(\xi) + \gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2} f_1(\xi) + \alpha(\alpha+2\gamma-1)t^\beta x^{\alpha+\gamma-2} f_1'(\xi) + \alpha^2 t^{2\beta} x^{2\alpha+\gamma-2} f_1''(\xi) + \\ &+ \gamma^2 x^{2\gamma-2} f_1^2(\xi) + 2\alpha\gamma t^\beta x^{\alpha+2\gamma-2} f_1(\xi) f_1'(\xi) + \alpha^2 x^{2\alpha+2\gamma-2} t^{2\beta} \left(f_1'(\xi)\right)^2. \end{aligned}$$

Вынесем общий множитель $x^{\alpha+\gamma} t^{\beta-1}$ и временно не будем его учитывать:

$$\begin{aligned} &\beta f_1'(\xi) + \gamma(\gamma-1)t^{1-\beta} x^{-\alpha-2} f_1(\xi) + \alpha(\alpha+2\gamma-1)t x^{-2} f_1'(\xi) + \alpha^2 t^{\beta+1} x^{-\alpha-2} f_1''(\xi) + \\ &+ \gamma^2 t^{1-\beta} x^{\gamma-\alpha-2} f_1^2(\xi) + 2\alpha\gamma t x^{\gamma-2} f_1(\xi) f_1'(\xi) + \alpha^2 x^{\alpha+\gamma-2} t^{\beta+1} \left(f_1'(\xi)\right)^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Замена на новую переменную $\xi = x^\alpha t^\beta$ возможна, если выполняется система

$$\begin{aligned} t^{1-\beta} x^{-\alpha-2} &= \xi^k, & t x^{-2} &= \xi^m, \\ t^{\beta+1} x^{\alpha-2} &= \xi^n, & t^{1-\beta} x^{\gamma-\alpha-2} &= \xi^z, \\ t x^{\gamma-2} &= \xi^p, & t^{\beta+1} x^{\alpha+\gamma-2} &= \xi^s, \end{aligned}$$

что равносильно

$$\begin{aligned} t^{1-\beta} x^{-\alpha-2} &= x^{\alpha k} t^{\beta k}, & t x^{-2} &= x^{\alpha m} t^{\beta m}, \\ t^{\beta+1} x^{\alpha-2} &= x^{\alpha n} t^{\beta n}, & t^{1-\beta} x^{\gamma-\alpha-2} &= x^{\alpha z} t^{\beta z}, \\ t x^{\gamma-2} &= x^{\alpha p} t^{\beta p}, & t^{\beta+1} x^{\alpha+\gamma-2} &= x^{\alpha s} t^{\beta s}. \end{aligned}$$

где k, m, n, z, p, s – постоянные, которые определяются из полученной системы. Решив систему уравнений, найдем $\alpha = -\frac{2}{k+1}$, $\beta = \frac{1}{k+1}$, $\gamma = 0$, $k \neq -1$ – свободное. Следовательно, ξ и f находятся по формулам:

$$\xi = (x^{-2} t)^{\frac{1}{k+1}}, \quad f = f_1(\xi). \quad (10)$$

Подставив найденные значения α , β и γ в многочлен (9), выполнив элементарные преобразования и умножив на $(k+1)^2$, запишем его в виде

$$f_1'(\xi) \left(k+1 + (6+2k)t x^{-2}\right) + 4t^{\frac{k+2}{k+1}} x^{-\frac{2k+2}{k+1}} \left(f_1''(\xi) + \left(f_1'(\xi)\right)^2\right). \quad (11)$$

Обозначим многочлен (11) как $F_1(\xi)$, $f_1'(\xi) = g$ и с учетом (10) запишем его в виде

$$g(k+1+(6+2k)\xi^{k+1})+4\xi^{k+2}(g'+g^2)=F_1(\xi). \quad (12)$$

Возвращаясь к первому уравнению системы (8) и учитывая вынесенный общий множитель $x^{\alpha+\gamma}t^{\beta-1}$ и полученные значения α , β , γ имеем

$$F = x^{\alpha+\gamma}t^{\beta-1}F_1(\xi) = x^{-\frac{2}{k+1}}t^{-\frac{k}{k+1}}F_1(\xi). \quad (13)$$

Найдем частные производные от F и f для их подстановки во второе уравнение системы (8)

$$\begin{aligned} F_t &= \frac{1}{k+1} \left(F_1'(\xi) x^{-\frac{4}{k+1}} t^{-\frac{2k}{k+1}} - k F_1(\xi) x^{-\frac{2}{k+1}} t^{-\frac{2k+1}{k+1}} \right); & F_x &= -\frac{2}{k+1} \left(F_1(\xi) x^{-\frac{k+3}{k+1}} t^{-\frac{k}{k+1}} + F_1'(\xi) x^{-\frac{k+5}{k+1}} t^{-\frac{k-1}{k+1}} \right); \\ F_{xx} &= \frac{2}{(k+1)^2} \left((k+7) F_1'(\xi) x^{-\frac{2(k+3)}{k+1}} t^{-\frac{k-1}{k+1}} + 2 F_1''(\xi) x^{-\frac{2(k+4)}{k+1}} t^{-\frac{k-2}{k+1}} + (k+3) F_1(\xi) x^{-\frac{2(k+2)}{k+1}} t^{-\frac{k}{k+1}} \right); \\ f_x &= -\frac{2}{k+1} g t^{\frac{1}{k+1}} x^{-\frac{k+3}{k+1}}; & f_{xx} &= \frac{2}{(k+1)^2} \left(2 g' x^{-\frac{2(k+3)}{k+1}} t^{\frac{2}{k+1}} + (k+3) g x^{-\frac{2(k+2)}{k+1}} t^{\frac{1}{k+1}} \right). \end{aligned}$$

Подставив их во второе уравнение системы (8), разделив полученное равенство на $x^{-\frac{2}{k+1}}t^{-\frac{2k+1}{k+1}}$ и выполнив замену на переменную $\xi = (x^{-2}t)^{\frac{1}{k+1}}$, получим

$$\begin{aligned} & (k+1)F_1'(\xi)\xi - k(k+1)F_1(\xi) + 4\xi^{k+3} \left(2(g'F_1(\xi) + gF_1'(\xi)) - F_1''(\xi) \right) + \\ & + 2\xi^{k+2} \left(2(k+5)gF_1(\xi) - (k+7)F_1'(\xi) \right) - 2(k+3)F_1(\xi)\xi^{k+1} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Перейдем от системы, состоящей из преобразованных равенств (12) и (14) к одному уравнению. Для этого найдем $F_1'(\xi)$ и $F_1''(\xi)$ и подставим в уравнение (14)

$$\begin{aligned} F_1'(\xi) &= g'(k+1) + 2g(k+1)(k+3)\xi^k + 2(2(k+2)(g'+g^2) + g'(k+3))\xi^{k+1} + 4(g'' + 2gg')\xi^{k+2}; \\ F_1''(\xi) &= (k+1)g'' + 4(k+1)((k+3)g' + (k+2)(g'+g^2))\xi^k + 2k(k+1)(k+3)g\xi^{k-1} + \\ & + 2((k+3)g'' + 4(k+2)(g'' + 2gg'))\xi^{k+1} + 4(g''' + 2((g')^2 + gg''))\xi^{k+2}. \end{aligned}$$

В итоге уравнение (14) после вышеописанной подстановки и приведения подобных слагаемых приобретет следующий вид:

$$\begin{aligned} & -k(k+1)^2g + (k+1)^2g'\xi + 4(k+1)(k+7)g^2\xi^{k+2} + 24(k+1)gg'\xi^{k+3} - \\ & - 4(k+3)(k+3+(k+1)(3k+7))g\xi^{2k+2} - 4(k+3)(11k+25)g'\xi^{2k+3} \\ & + 48(k+3)(g^3 - g'')\xi^{2k+4} + 16(6g^2g' - g''')\xi^{2k+5} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Что и требовалось доказать.

ЛЕММА 3. Система уравнений (8) с помощью автомодельных преобразований $\xi = (x^{-2}t)^{\frac{1}{k+1}}$, $f = f_1(\xi)$ сводится к уравнению (15).

Будем искать решения уравнения (15) в виде рядов, для этого представим g в виде

$$g = \sum_n a_n \xi^n, \quad a_n - \text{const}, \quad (16)$$

Найдем, для какого значения N ряд (16) может удовлетворять уравнению (15). Оценим степени ряда (16), для этого положим

$$g \approx a_N \xi^N, \quad g^2 \approx a_N^2 \xi^{2N}, \quad g^3 \approx a_N^3 \xi^{3N}.$$

$$g' \approx a_N N \xi^{N-1}, \quad g'' \approx a_N N(N-1) \xi^{N-2}, \quad g''' \approx a_N N(N-1)(N-2) \xi^{N-3}$$

и подставим в уравнение (15). Тогда уравнение после подстановки и преобразований примет вид

$$48a_N^2 (2N+k+3) \xi^{3N+2k+4} - 4(2N+k+3)((k+3)+(N+k+1)(2N+3k+7)) \xi^{N+2k+2} +$$

$$+ 4a_N (k+1)(6N+k+7) \xi^{2N+k+2} + (k+1)^2 (N-k) \xi^N = 0. \quad (17)$$

Старшие степени совпадут в четырех случаях, два из которых совпадают:

$$1) \quad 3N+2k+4 = N+2k+2;$$

данное равенство верно при $N = -1$. В этом случае слагаемые уравнения (23) содержат ξ^{2k+1} , ξ^k и ξ^{-1} . Для того чтобы ряд (21) удовлетворял уравнению (20), необходимо, чтобы $2k+1 < -1$, то есть когда $k < -1$.

$$2) \quad 3N+2k+4 = 2N+k+2;$$

данное равенство верно при $N = -(k+2)$. В этом случае слагаемые уравнения (17) содержат $\xi^{-(k+2)}$ и ξ^k . Аналогично, чтобы ряд (16) удовлетворял уравнению (15), необходимо, чтобы $-(k+2) < k$, то есть когда $k > -1$.

В данной статье рассмотрим первый случай. Тогда многочлен g (16) примет вид

$$g = \frac{a_{-1}}{\xi} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n. \quad (18)$$

Возведем его в степень, определим производные и подставим в уравнение (17):

$$g^2 = \frac{a_{-1}^2}{\xi^2} + 2 \frac{a_{-1}}{\xi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n \right)^2, \quad g^3 = \frac{a_{-1}^3}{\xi^3} + 3 \frac{a_{-1}^2}{\xi^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n + 3 \frac{a_{-1}}{\xi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n \right)^2 + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n \right)^3,$$

$$g' = -\frac{a_{-1}}{\xi^2} + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n \xi^{n-1}, \quad g'' = \frac{2a_{-1}}{\xi^3} + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n \xi^{n-2}, \quad g''' = -\frac{6a_{-1}}{\xi^4} + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n \xi^{n-3}.$$

Получим равенство, распределив члены для удобства в порядке убывания степеней. Будем называть их соответственно первым, вторым, ... n - слагаемым.

$$-12a_{-1}(k+1)((k+1)^2 - 4a_{-1}^2) \xi^{2k+1} +$$

$$+ 4\xi^{2k+2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[12a_{-1}^2 (2n+3k+5) - (k+3)(n(11k+12n+13) + 3k^2 + 11k + 10) - 4n(n-1)(n-2) \right] a_n \xi^n +$$

$$+ 48a_{-1} \xi^{2k+3} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n \sum_{n=0}^{\infty} (3k+4n+7) a_n \xi^n + 48\xi^{2k+4} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n \right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (k+2n+3) a_n \xi^n +$$

$$+ 4(k+1)^2 a_{-1}^2 \xi^k + 8(k+1) a_{-1} \xi^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} (k+3n+4) a_n \xi^n +$$

$$+ 4(k+1) \xi^{k+2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n \sum_{n=0}^{\infty} (k+6n+7) a_n \xi^n - (k+1)^3 \frac{a_{-1}}{\xi} + (k+1)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n-k) a_n \xi^n = 0; \quad (19)$$

Рассмотрим, как для любого целого $k < -1$ меняется рост старших степеней уравнения (19) и запишем это во вспомогательной таблице 1.

Таблица 1

Рост старших степеней уравнения (19) для любого целого $k < -1$

	$k = -2$	$k = -3$	$k = -4$	$k = -5$	$k = -6$	$k = -7$	$k = -8$	$k = -9$	Вхождение
$2k+1$	-3	-5	-7	-9	-11	-13	-15	...	Единств.
$2k+2$	-2	-4	-6	-8	-10	-12	-14	...	Имеют все последующие степени
$2k+3$	-1	-3	-5	-7	-9	-11	-13	...	
$2k+4$	0	-2	-4	-6	-8	-10	-12	...	
k	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	...	
$k+1$	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	...	
$k+2$	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	...	

Теперь найдем, при каких степенях возникнут произвольные постоянные. Для этого положим $g \sim a_{-1}\xi^{-1} + a_{r-1}\xi^{r-1}$, r – целое число, тогда

$$g^2 \sim a_{-1}^2 \xi^{-2} + 2a_{-1}a_{r-1}\xi^{r-2} + a_{r-1}^2 \xi^{2r-2}, \quad g^3 \sim a_{-1}^3 \xi^{-3} + 3a_{-1}^2 a_{r-1} \xi^{r-3} + 3a_{-1} a_{r-1}^2 \xi^{2r-3} + a_{r-1}^3 \xi^{3r-3},$$

производные соответственно примут следующий вид

$$g' \sim -a_{-1}\xi^{-2} + a_{r-1}(r-1)\xi^{r-2}, \quad g'' \sim 2a_{-1}\xi^{-3} + a_{r-1}(r-1)(r-2)\xi^{r-3},$$

$$g''' \sim -6a_{-1}\xi^{-4} + a_{r-1}(r-1)(r-2)(r-3)\xi^{r-4}.$$

Подстановка этих значений в уравнение (15) даст равенство

$$\begin{aligned} & -(k+1)^3 a_{-1} \xi^{-1} + 4(k+1)^2 a_{-1}^2 \xi^k + 12(k+1)(4a_{-1}^2 - (k+1)^2) a_{-1} \xi^{2k+1} + \\ & + (k+1)^2 (r-k-1) a_{r-1} \xi^{r-1} + 8(k+1)(3r+k+1) a_{-1} a_{r-1} \xi^{r+k} + 4(k+1)(6r+k+1) a_{r-1}^2 \xi^{2r+k} - \\ & - 4((k+3)(3k^2 + 12r^2 + 11r(k-1) + 9) + 4(r^3 - 6r^2 + 11r - 6) - 12(2r+3k+3) a_{-1}^2) a_{r-1} \xi^{2k+r+1} + \\ & + 48(4r+3k+3) a_{-1} a_{r-1}^2 \xi^{2k+2r+1} + 48(2r+k+1) a_{r-1}^3 \xi^{2k+3r+1} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что в данном уравнении старшей отрицательной степенью является $2k+1$ (первая строка таблицы 1). С такой степенью имеется только одно слагаемое $12(k+1)((k+1)^2 - 4a_{-1}^2) a_{-1} \xi^{2k+1}$, поэтому коэффициент a_{-1} определяется следующим образом: $a_{-1} = \pm \frac{1}{2}(k+1)$ или $a_{-1} = 0$. В статье рассмотрим ненулевое значение a_{-1} .

Коэффициенты при ξ^{2k+r+1} с учетом найденного значения a_{-1} представляют собой алгебраическое уравнение для r :

$$4r^3 + 12(k+1)r^2 + 5(k+1)^2 r - 6(k+1)^3 = 0,$$

корни которого укажут порядок, при котором могут возникнуть произвольные коэффициенты.

Данное уравнение имеет три корня: $r_1 = -2(k+1)$, $r_2 = -\frac{3}{2}(k+1)$, $r_3 = \frac{1}{2}(k+1)$. С учетом поправки

на наивысшую степень получим степени $n_1 = 2k - 2(k+1) + 1 = -1$, $n_2 = 2k - \frac{3}{2}(k+1) + 1 = \frac{k-1}{2}$,

при которых возникают произвольные коэффициенты (корень уравнения $r_3 = \frac{1}{2}(k+1)$ дает степень

$n_3 = 2k + \frac{1}{2}(k+1) + 1 = \frac{5k+3}{2}$, которая отсутствует в рассматриваемом уравнении). Так как степень n должна быть целым числом, то в случае n_2 она становится таковой при нечетных $k \leq -3$.

Таким образом, получается, что при четных $k \leq -2$ возникает один свободный коэффициент при ξ^{-1} , а при нечетных $k \leq -3$ – два свободных коэффициента при ξ^{-1} и $\xi^{\frac{k-1}{2}}$.

Подставив значение a_{-1} в уравнение (19), получим равенство, с которым будем работать для определения остальных коэффициентов:

$$\begin{aligned} & \xi^{2k+2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[3(k+1)^2(2n+3k+5) - (k+3)(n(11k+12n+13) + 3k^2 + 11k + 10) - 4n(n-1)(n-2) \right] a_n \xi^n \pm \\ & \pm 6(k+1) \xi^{2k+3} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n \sum_{n=0}^{\infty} (3k+4n+7) a_n \xi^n + 12 \xi^{2k+4} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n \right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (k+2n+3) a_n \xi^n + \frac{(k+1)^4}{4} \xi^k \pm \\ & \pm (k+1)^2 \xi^{k+1} \sum_{n=0}^{\infty} (k+3n+4) a_n \xi^n + (k+1) \xi^{k+2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n \sum_{n=0}^{\infty} (k+6n+7) a_n \xi^n \mp \\ & \mp \frac{(k+1)^4}{8} \xi^{-1} + \frac{(k+1)^2}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (n-k) a_n \xi^n = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Проанализируем следующее слагаемое со степенью $2k+2$. Следующая строка таблицы 1 показывает, что начиная с $k \leq -3$ старший член этого слагаемого уравнения (19) не имеет пары (кроме при $k = -2$), поэтому либо коэффициент, стоящий при a_0 , либо a_0 должны обнулиться (при этом $n = 0$). Рассмотрим первое условие, когда $a_0 \neq 0$. Тогда коэффициент, стоящий при a_0 , обнуляется при условии, когда $k = 1; -\frac{3}{2}; -\frac{5}{3}$. Корень $k = 1$ не входит в область $k < -1$, при $k = -\frac{3}{2}$ и $k = -\frac{5}{3}$ четвертое слагаемое уравнения (20) не будет иметь пары, поэтому в данной ситуации уравнение (15) решений иметь не будет. Следовательно, начиная с $k \leq -3$ будет выполняться второе условие, когда $a_0 = 0$. При $k = -2$ коэффициенты при ξ^{2k+2} и ξ^k являются парными, поэтому a_0 находится из равенства, состоящего из суммы первого члена первого слагаемого уравнения (20) при ξ^{2k+2} и четвертого слагаемого при ξ^k : $-3a_0 + \frac{1}{4} = 0$, откуда $a_0 = \frac{1}{12}$.

Следующие коэффициенты определяются аналогично, выписывая слагаемые при одинаковых степенях ξ . Отразим полученные результаты в таблице 2.

Коэффициенты находятся до a_{-2k-3} . Все последующие определяются по рекуррентной формуле

$$\begin{aligned} a_{m-2k-2} = & -\frac{1}{m(k(12m-5k+14) + 7 - 4m^2) + k(2-5k) + 3} \left(\pm 6(k+1) \sum_{n=0}^{m-2k-3} (3k+4n+7) a_n a_{m-2k-3-n} \pm \right. \\ & \pm (k+1)^2 (3m-2k+1) a_{m-k-1} + 12 \sum_{i=0}^{m-2k-4} a_i \sum_{n=0}^{m-2k-4-i} (k+2n+3) a_n a_{m-2k-4-i-n} + \\ & \left. + (k+1) \sum_{n=0}^{m-k-2} (k+6n+7) a_n a_{m-k-2-n} + \frac{(k+1)^2 (m-k)}{4} a_m \right); \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА. Комплекснозначное нелинейное уравнение (1) имеет автомодельные решения, определенные следующим образом: $p(x, t) = u(x, t) + iv(x, t)$, $u = \frac{1}{2}(w + q)$, $v = \frac{1}{2}(w - q)$,

$q = \frac{w_t + w_{xx}}{4w^2}$, $w = e^f$, $f = f_1(\xi)$, $f_1'(\xi) = g$, $\xi = (x^{-2}t)^{\frac{1}{k+1}}$, $g = \frac{a_{-1}}{\xi} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n$, где коэффициенты ряда g принимают значение из таблицы 2.

Таблица 2

**Значение коэффициентов в разложении ряда g (18) при определённых степенях ξ
и любом $k \leq -2$**

$k \backslash \xi^l$	ξ^{2k+1}	...	ξ^k	...	$\xi^{\frac{k-1}{2}}$	...	ξ^{-1}	...
Не-чет	$a_{-1} = \pm \frac{1}{2}(k+1)$	коэффициенты, имеющиеся между a_{-1} и a_{-k-2} равны нулю; их количество равно $-k-2$	$a_{-k-2} = -\frac{(k+1)}{12}$	коэффициенты, имеющиеся между a_{-k-2} и $a_{-\frac{3k+5}{2}}$ равны нулю; их количество $-\frac{k+3}{2}$	$a_{-\frac{3k+5}{2}}$ — своб.	коэффициенты, имеющиеся между $a_{-\frac{3k+5}{2}}$ и a_{-2k-3} равны нулю; их количество $-\frac{k+3}{2}$	a_{-2k-3} — своб.	ре-кур. форм
Чет	$a_{-1} = \pm \frac{1}{2}(k+1)$		$a_{-k-2} = -\frac{(k+1)}{12}$	коэффициенты, имеющиеся между a_{-k-2} и a_{-2k-3} равны нулю; их количество равно $-k-2$			a_{-2k-3} — своб.	ре-кур. форм

Литература

1. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 256 с.
2. Новикова О. В. Исследование комплекснозначного нелинейного уравнения в частных производных // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Калининград: Изд-во БФУ. Вып. 4. Физико-математические науки. 2012. С. 160–166.