ФИЗИКА И МАТЕМАТИКА

УДК 517.2

Адамчук Анна Станиславовна, Амироков Станислав Рауфович,
Притула Татьяна Константиновна

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ДВУХ ФИРМ С ПОМОЩЬЮ ВОЛЬТЕРРОВСКОЙ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СООБЩЕСТВ

Найдены координаты устойчивого стационарного состояния модели взаимодействия двух фирм в экономике путем сравнения с двухвидовой вольтерровской моделью с произвольными коэффициентами.

Ключевые слова: устойчивость, дифференциальные уравнения, рыночная экономика, модель, параметр.

Adamchuk Anna S., Amirokov Stanislav R., Pritula Tatyana K.

RESEARCH OF BEHAVIOR OF TWO FIRMS BY MEANS OF VOLTERRA MODEL OF INTERACTION OF COMMUNITIES

Coordinates of a steady steady state of model interaction of two firms are found in economy by comparison with two-specific Volterra model with any coefficients.

Key words: stability, differential equations, market economy, model, parameter.

В рыночной экономике очень важным считается наличие конкуренции. Однако вопросы о методах конкуренции до сих пор представляют особый интерес, как и вопрос о возможности сосуществования многих фирм на рынке для демонополизации товаров и услуг.

При взаимодействии нескольких сообществ динамика изменения их численности во многих случаях описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений вольтерровского типа. Известно, что устойчивость этих систем к малым отклонениям не является общим свойством. В нелинейных системах и в параметрическом, и в фазовом пространстве есть области, где система становится чрезвычайно чувствительной к флуктуациям и малым внешним воздействиям [1]. В параметрическом пространстве – это бифуркационные границы, по разные стороны которых система имеет качественно различный характер поведения. В фазовом пространстве – это сепаратрисы, отделяющие области влияния аттракторов.

Такие системы были выведены для моделирования взаимодействий популяций в экологии, однако к настоящему времени нашли широкое применение и при описании конкурентной борьбы в экономике. Поскольку особый интерес представляют условия «сосуществования» сообществ (фирм), необходимо исследовать вопросы устойчивости соответствующих систем нелинейных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим вопросы устойчивости модели взаимодействия двух фирм в экономике. В соответствии с работой [2], будем считать, что рассматривается взаимодействие фирм, производящих однотипные товары, то есть сходных по цене и качеству.

Примем обозначения, введенные в работе [2], то есть N – число потребителей производимого продукта, S – доходы потребителей данного продукта (в первом приближении считается, что доходы всех потребителей одинаковы), M – оборотные средства предприятия, τ – длительность производственного цикла, p - рыночная цена товара, $\widetilde{p}$ – себестоимость продукта, δ – доля оборотных средств, идущих на покрытие переменных издержек, k – постоянные издержки, которые не зависят от количества выпускаемой продукции, $Q(S/p)$ – функция спроса, зависящая от отношения дохода к цене и равная количеству продукта, потребляемому потребителем в единицу времени.

При взаимодействии двух фирм, производящих взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящихся в одной рыночной нише, на рынке устанавливается единая цена, которая определяется балансом суммарного предложения и спроса. Иначе говоря, когда конкурентная борьба ведется только рыночными методами, то согласно [2], конкуренты в рамках этой модели не могут «назначать» цену или влиять на потребителей иначе, чем путем изменения параметров своего производства.

В симметричном случае, когда параметры фирм одинаковы и учтены постоянные затраты, модель можно представить в виде системы двух нелинейных уравнений [2]:

$$\frac{dM_1}{dt} = M_1 - bM_1M_2 - bM_1{}^2 - k_1',$$
$$\frac{dM_2}{dt} = M_2 - bM_1M_2 - bM_2{}^2 - k_2'. \quad (1)$$

Эту систему можно сравнить с простейшей вольтерровской моделью

$$\frac{dU_1}{dt} = a_1U_1 + a_{12}U_1U_2 + a_{11}U_1^2,$$
$$\frac{dU_2}{dt} = a_2U_2 + a_{21}U_1U_2 + a_{22}U_2^2 \quad (2)$$

взаимодействия 2 разных объектов, описываемой уравнениями (2).

Система (2) представляет собой модель Лотки-Вольтерра взаимодействия двух разных популяций. В зависимости от выбора коэффициентов a_i, a_{ij} модель (2) может принадлежать одному из следующих типов: симбиоз ($a_{12}, a_{21} > 0$), комменсализм ($a_{12} > 0, a_{21} = 0$), хищник-жертва ($a_{12} > 0, a_{21} < 0$), аменсализм ($a_{12} = 0, a_{21} < 0$), конкуренция ($a_{12}, a_{21} < 0$), нейтрализм ($a_{12}, a_{21} = 0$) [1].

Перепишем систему (2) в виде

$$\frac{dU_1}{dt} = U_1(a_1 + a_{12}U_2 + a_{11} * U_1), \qquad \frac{dU_2}{dt} = U_2(a_2 + a_{21}U_1 + a_{22} * U_2).$$

Эта система имеет 4 стационарные точки:

1. $U_1 = U_2 = 0$;

2. $U_1 = -\frac{a_1}{a_{11}},\ U_2 = 0$;

3. $U_1 = 0,\ U_2 = -\frac{a_2}{a_{22}}$;

4. $U_1 = \frac{a_2a_{12} - a_1a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\ U_2 = -\frac{a_2a_{11} - a_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$.

Исследуем эти точки на устойчивость.

1. Рассмотрим нулевое решение $U_1 = U_2 = 0$. Характеристическое уравнение этой системы $\lambda^2 + \lambda(-a_1 - a_2) + a_1a_2 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = a_1$, $\lambda_2 = a_2$.

Так как коэффициенты a_1 и a_2 – действительные числа, то при $a_1, a_2 < 0$ данная особая точка – устойчивый узел. Если $a_1, a_2 > 0$, то эта особая точка – неустойчивый узел. Если a_1, a_2 разных знаков, то данная особая точка – седло (неустойчива).

На бифуркационной диаграмме с осью абсцисс a_1 и осью ординат a_2 ситуация такова: в квадранте I наблюдается неустойчивый узел, во II и IV седло, в III – устойчивый узел.

2. Стационарные решения $U_1 = -\frac{a_1}{a_{11}},\ U_2 = 0$ и $U_1 = 0,\ U_2 = -\frac{a_2}{a_{22}}$ исследуем на примере точки $U_1 = -\frac{a_1}{a_{11}},\ U_2 = 0$.

Устойчивость этого стационарного состояния исследуем методом Ляпунова [3]. Введем новую переменную ξ, характеризующую отклонение переменной U_1 от нулевого состояния: $U_1(t) = \xi(t) - \frac{a_1}{a_{11}}$. Линеаризованная система в новых переменных имеет вид

$$\frac{d\xi}{dt} = -a_1\xi - \frac{a_{12}a_1}{a_{11}}U_2, \qquad \frac{dU_2}{dt} = \left(a_2 - \frac{a_{21}a_1}{a_{11}}\right)U_2.$$

Ее характеристическое уравнение имеет корни:

$$\lambda_1 = -a_1; \quad \lambda_2 = \frac{a_2 a_{11} - a_1 a_{21}}{a_{11}}.$$

Характер этой особой точки зависит от выбора параметров a_i и a_{ij}. Условием устойчивости данного состояния равновесия является наличие отрицательной действительной части корней λ_1 и λ_2. Так как в модели все параметры a_i и a_{ij} – действительные числа, то λ_1 и λ_2 тоже будут действительными. Значит, состояние будет устойчиво в том случае, если: $a_1 > 0$ и $\frac{a_2 a_{11} - a_1 a_{21}}{a_{11}} < 0$.

Если ввести обозначение $\sigma(a_1) = \frac{a_2 a_{11} - a_1 a_{21}}{a_{11}}$, то на бифуркационной диаграмме с осью абсцисс a_1 и осью ординат σ ситуация такова: в квадрантах I и III наблюдается седло, во II – неустойчивый узел, в IV – устойчивый узел.

3. Рассмотрим особую точку $U_1 = \frac{a_2 a_{12} - a_1 a_{22}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$, $U_2 = -\frac{a_2 a_{11} - a_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$.

Исследуем также устойчивость этого стационарного состояния методом Ляпунова с помощью новых переменных ξ, η, характеризующих отклонения U_1 и U_2 от нулевого состояния. Линеаризованная система в новых переменных примет вид

$$\frac{d\xi}{dt} = \left(a_1 + a_{12} n + 2a_{11} m\right)\xi + a_{12} m \eta, \qquad \frac{d\eta}{dt} = a_{21} n \xi + \left(a_2 + a_{21} m + 2a_{22} n\right)\eta.$$

Ее характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_{12} n + 2a_{11} m - \lambda & a_{12} m \\ a_{21} n & a_2 + a_{21} m + 2a_{22} n - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Для поиска корней этого уравнения воспользуемся пакетом Mathcad, получим

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_2 a_{11} a_{12} - a_1 a_{11} a_{22} - a_2 a_{11} a_{22} + a_1 a_{21} a_{22}}{2(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})} \pm \frac{\sqrt{r}}{2(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})},$$

где

$$r = a_1^2 a_{11}^2 a_{22}^2 + 2a_1^2 a_{11} a_{21} a_{22}^2 - 4a_1^2 a_{12} a_{21}^2 a_{22} + a_1^2 a_{21}^2 a_{22}^2 - 2a_1 a_2 a_{11}^2 a_{12} a_{22} - 2a_1 a_2 a_{11}^2 a_{22}^2 +$$
$$+2a_1 a_2 a_{11} a_{12} a_{21} a_{22} - 2a_1 a_2 a_{11} a_{21} a_{22}^2 + 4a_1 a_2 a_{12}^2 a_{21}^2 + a_2^2 a_{11}^2 a_{12}^2 + 2a_2^2 a_{11}^2 a_{12} a_{22} + a_2^2 a_{11}^2 a_{22}^2 - 4a_2^2 a_{11} a_{12}^2 a_{21}.$$

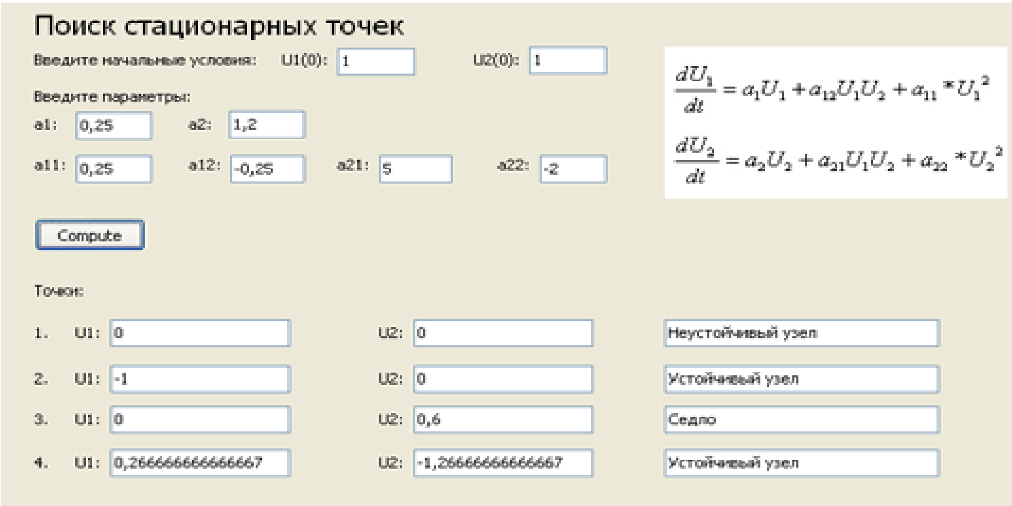
Если $r < 0$, корни λ_1 и λ_2 комплексно-сопряженные. В этом случае точка $U_1 = \frac{a_2 a_{12} - a_1 a_{22}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$, $U_2 = -\frac{a_2 a_{11} - a_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$ является фокусом (устойчивым или неустойчивым). Условием устойчивости этой особой точки будет отрицательность действительной части корней λ_1 и λ_2, т. е.

$$\frac{a_2 a_{11} a_{12} - a_1 a_{11} a_{22} - a_2 a_{11} a_{22} + a_1 a_{21} a_{22}}{2(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})} < 0. \qquad (3)$$

Если $r > 0$, корни λ_1 и λ_2 действительные. Условием устойчивости будет отрицательность обоих корней.

Для достижения устойчивости модели (2) необходимо подобрать такие коэффициенты a_i и a_{ij}, при которых вышеуказанные условия (3) будут выполняться.

Алгоритм исследования модели (2) с любыми коэффициентами реализован в среде DELPHI в комбинации с пакетом Mathcad. Программа анализирует λ_1 и λ_2 и выдает результат в диалоговом окне:



Кроме того, при нажатии на кнопку Graphics строятся графики зависимостей $U_1(t)$ и $U_2(t)$, а также фазовые траектории.

В одном из частных случаев модели (2) взаимодействия 2 разных объектов, получаем систему:

$$\frac{dU_1}{dt} = U_1 - U_1U_2 - aU_1^2,$$

$$\frac{dU_2}{dt} = U_2 - U_1U_2 - aU_2^2, \tag{4}$$

которая при N = 2 получается из модели выбора единого генетического кода [4]

$$\frac{dU_i}{dt} = U_i - \sum_{j \neq i}^{N} U_iU_j - aU_i^2. \tag{5}$$

В ней $U_i(U_j)$ – концентрация объектов *i*-го (*j*-го) типа, *t* – время, a – коэффициент внутривидового антагонизма; первый член описывает репродукцию, второй – антагонистическое взаимодействие разных объектов, третий – эффект «тесноты», т. е. конкуренцию одинаковых объектов. Система (5) соответствует модели репродукции ДНК в генетике.

Система (4) для случая взаимодействия двух объектов имеет ненулевую стационарную точку, ее координаты:

$$U_1 = \frac{1}{a+1}, \; U_2 = \frac{1}{a+1}. \tag{6}$$

Характер устойчивости этой особой точки зависит от выбора параметра *a*, в частности, при $a > 1$ эта особая точка является устойчивым узлом. При решении системы (4) смысл имеют только неотрицательные решения, кроме того, известно [3], что эти модели плохо описывают динамику сообщества, если его численность близка к нулю, поскольку в этом случае вид может исчезнуть в результате действий случайных факторов, которые не отражены в соответствующем уравнении системы.

Таким образом, когда внутривидовой антагонизм ме ньше межвидового ($a < 1$), в модели (4) происходит ситуация, когда остаётся одно из взаимодействующих сообществ, а другое пропадает. Состояние, где обе U_i одинаковы, неустойчиво; какая из популяций победит, зависит от начальной концентрации и случайных флуктуаций.

Однако вышеприведенные расчеты показывают, что даже для двухвидовой системы существует ненулевое стационарное состояние при $a > 1$, т. е. при более активном внутривидовом взаимодействии объектов существует возможность «сосуществования».

Рассматривая аналогичным образом модель (1), находим, что она имеет неустойчивое стационарное состояние типа «седло» [2], через него проходит сепаратриса, разделяющая фазовое пространство на две области притяжения. В каждой из них один из конкурентов полностью вытесняет другого.

Но если в модели (1) несколько изменить систему, добавив постоянные затраты и эффект рекламы, ситуация может измениться. Из предпринимательской практики известно, что расходы на рекламу R_1 и R_2 зависят от доходов: $\delta_1 M_1$ и $\delta_2 M_2$, причем не линейно, а в более высокой степени.

Примем, что расходы растут квадратично [2], то есть $S_1 = \delta_1 M_1 - \alpha\left(\delta_1 M_1\right)^2$, $S_2 = \delta_2 M_2 - \alpha\left(\delta_2 M_2\right)^2$, где α – феноменологический коэффициент. В оптимальном режиме работы предприятия [2] сумма этих расходов должна быть максимальна. Это имеет место при $\delta_1 M_1 = \frac{1}{2}\alpha$, и тогда обе суммы равны $S_1 = S_2 = S = \frac{1}{4}\alpha$. Тогда система (1) приведется к виду

$$\frac{dM_1}{dt} = M_1 - bM_1M_2 - bM_1^2 - k_1' + S,$$
$$\frac{dM_2}{dt} = M_2 - bM_1M_2 - bM_2^2 - k_2' + S. \quad (7)$$

В случае $S < k_1$ и $S < k_2$ качественные свойства модели (7) остаются такими же, как и для системы (1). Однако, при $S > k_1$ и $S > k_2$ ситуация меняется, возникает устойчивое стационарное состояние [2]:

$$M_1 = \frac{S - k_1}{b(2S - k_1 - k_2)}, \qquad M_2 = \frac{S - k_2}{b(2S - k_1 - k_2)},$$

что и следовало ожидать, сравнивая модель (7) с моделью (4), рассмотренной выше.

Таким образом, в этом случае возможно сосуществование конкурентов. Смысл этого в том, что благодаря рекламе каждая из фирм создаёт свою нишу, в которой потребители предпочитают приобретать товар именно этой фирмы. Фактически конкуренты сосуществуют независимо.

Литература

1. Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса: Новый диалог человека с природой. М.: УРСС, 2003. 312 с.
2. Чернавский Д. С., Щербаков А. В., Зульпукаров М. М. Модель конкуренции. М.: Препринт ИПМ. 2006. № 64.
3. Романов М. Ф., Федоров М. П. Математические модели в экологии. СПб.: Иван Федоров, 2003. 240 с.
4. Свирежев Ю. М., Пасеков В. П. Основы математической генетики. М.: Наука, 1978. 272 с.

УДК 517.95

Новикова Ольга Викторовна

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В статье ставится задача поиска автомодельных решений нелинейного уравнения в частных производных на комплекснозначную функцию. Вначале рассмотрена система уравнений, эквивалентная исследуемой модели, продемонстрировано её преобразование к виду, допускающему получение решений такого типа. Автор подробно описывает каждый этап анализа и в результате приходит к решению поставленной задачи.

Ключевые слова: автомодельные решения, нелинейное уравнение, система уравнений, производная функции, произвольная степень, параметр.

Novikova Olga V.

THE AUTOMODEL SOLUTIONS OF COMPLEX VALUED NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION IN PARTIAL DERIVATIVES

The aim of this article is to find the automodel solutions of nonlinear equation in partial derivatives with the complex valued function. The system of equations, which equivalent to the observable model, is examined at the beginning of the article. The modification of the system to the type, which allows to get the automodel solutions, is shown. The author describes every step of the analysis in detail. As a result, he achieves his aim.

Key words: automodel solutions, nonlinear equation, system of equations, derivative of function, coefficient, any degree, parameter.

Дадим определение автомодельных решений [1]. Автомодельными называются решения уравнения $F\left(x, t, \omega, \omega_x, \omega_t, \omega_{xx}, \omega_{xt}, \omega_{tt} ...\right) = 0$ вида $w\left(x,t\right) = t^{\alpha} U\left(\zeta\right)$, $\zeta = xt^{\beta}$, α, β – параметры.

Исследуемое в данной статье комплекснозначное нелинейное уравнение в частных производных имеет вид: