

УДК 517.375

**Курбанмагомедов Арслан Курбанович, Макаров Евгений Васильевич,
Раджабов Закир Рамазанович**

МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГО-ПРОЧНОСТНЫХ СВОЙСТВ МНОГОСЛОЙНЫХ МАТЕРИАЛОВ

В статье рассматриваются композиционные материалы, представляющие собой армированную волокнистым наполнителем матрицу и обладающие ярко выраженной механической анизотропией. Их упругие, пластические, вязкие и прочностные свойства существенно зависят от ориентации и относительного объема волокон и от направления внешней нагрузки.

Ключевые слова: композит, анизотропия, материалы, свойство, состояние, коэффициент.

Arslan Kurbanmagomedov, Evgeny Makarov, Zakir Radjabov

SIMULATION OF ELASTIC-STRENGTH PROPERTIES IN MULTI-LAYER MATERIALS

The article deals with composite materials, which are represented by matrices reinforced with fiberfill and have a pronounced mechanical anisotropy. Their elastic, plastic, viscous and mechanical properties depend strongly on the orientation and the relative volume of the fibers and the direction of the external load.

Key words: composite, anisotropy, materials, property, condition, coefficient.

Полимерные композиционные материалы в силу своей гетерогенной структуры представляют собой материалы с ярко выраженной анизотропией физико-механических свойств. Их свойства существенно зависят как от объемных долей структурных составляющих матрицы и армирующего волокна, так и от степени их взаимодействия. Установлено [1; 2], что при горячем прессовании таких материалов между матрицей и армирующим наполнителем образуется граничный слой с характерными для него свойствами, отличными от матрицы и наполнителя. Поэтому при анализе свойств композитных материалов возникает необходимость учета свойств граничных слоев, чтобы построить такую математическую модель, которая достаточно точно описывала бы рассматриваемый материал.

Анизотропия упругих свойств такого материала в зависимости от геометрических и физических параметров структурных составляющих определена в работе [3].

Анизотропия физико-механических свойств слоистых металлоорганопластиков на основе экспериментальных методов исследована в работе [2], где показано, что анизотропия вязко-упругих свойств металлоорганопластиков зависит от объемной доли армирующего наполнителя, температуры и угла между осью образца и направлением армирующего наполнителя.

В настоящей работе рассматривается математическая модель композита для исследования коэффициента Пуассона в зависимости от способа армирования и объемных долей составляющих. Для этого рассмотрим однородное упругое состояние однослойного полимерного композита.

Рассмотрим растяжение тонкой пластины, представляющей собой изотропную матрицу, армированную двумя семействами тонких нитей. Пластина нагружена растягивающим напряжением в направлении оси OX , а нити расположены не симметрично относительно выбранной системы координат. Угол между основными и уточными нитями армирующего наполнителя обозначим 2α , а угол между осью OX и осью симметрии композита обозначим β (рис. 1)

Пусть, что K_0 – объемное содержание матрицы K_1 – объемное содержание армирующего наполнителя, причем $K_0 + K_1 = 1$ и $K_1 \langle K_0, x_0, \alpha_0$ – упругие постоянные Ламе матрицы, E_1 – модуль Юнга армирующих нитей.

Коэффициент Пуассона ν_{yx} , характеризующий поперечное сужение в направлении оси OY при растяжении вдоль оси OX , имеет следующее значение [3]:

$$\nu_{xy} = \frac{(K_0\mu_0 + \frac{K_1E_1}{2}a_{xy})[2K_0\mu_0\lambda_0 + (\lambda_0 + 2\mu_0)\frac{K_1E_1}{2}a_{xy}] - (\lambda_0 + 2\mu_0)\frac{K_1^2E_1^2}{4}b_xb_y}{(K_0\mu_0 + \frac{K_1E_1}{2}a_{xy})[4K_0\mu_0 + (\lambda_0 + \mu_0) + (\lambda_0 + 2\mu_0)\frac{K_1E_1}{2}a_y] - (\lambda_0 + 2\mu_0)\frac{K_1^2E_1^2}{4}b_y^2} \quad (5)$$

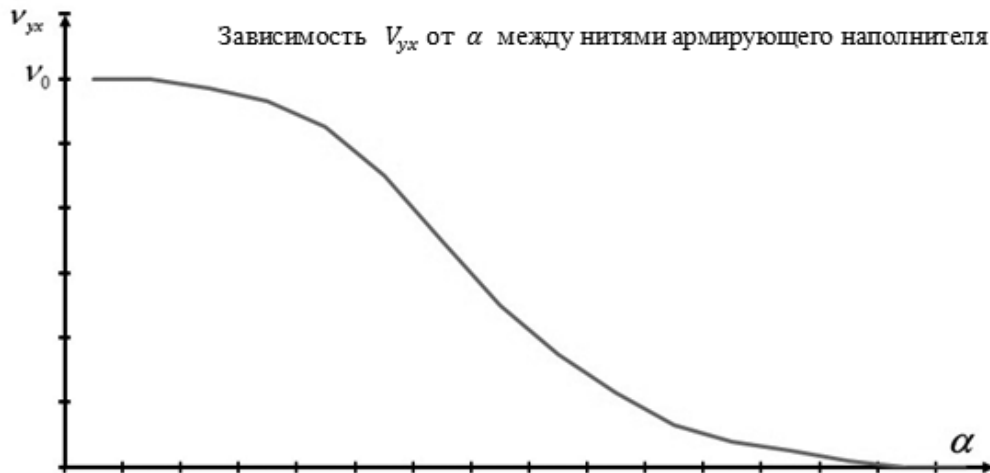


Рис. 1. Зависимость ν_{yx} от α между нитями армирующего наполнителя

Формула (5) имеет довольно громоздкий вид, что затрудняет ее анализ, поэтому исследуем полученное выражение для частного случая растяжения композита вдоль оси симметрии арматуры, для чего нужно положить $\beta = 0$. В этом случае коэффициенты (4) с учетом (1) примут вид:

$$a_x = \cos^4 \alpha; a_y = 2\sin^4 \alpha; a_{xy} = 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha; b_x = b_y = 0 \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), получим:

$$\nu_{yx} = \frac{2\lambda_0\mu_0 + E_1 \frac{K_1}{K_0} (\lambda_0 + 2\mu_0) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{4\mu_0(\lambda_0 + 2\mu_0) + E_1 \frac{K_1}{K_0} (\lambda_0 + 2\mu_0) \sin^4 \alpha} \quad (7)$$

Удобнее перейти от постоянных Ламе λ_0, μ_0 к модулю Юнга E_0 и коэффициенту Пуассона ν_0 с помощью соотношений [4]:

$$\lambda_0 = \frac{E_0\nu_0}{(1+\nu_0)(1-2\nu_0)}, \mu_0 = \frac{E_0}{2(1+\nu_0)} \quad (8)$$

Тогда выражение (7) примет вид

$$\nu_{xy} = \frac{\frac{\nu_0}{1-\nu_0^2} + \frac{K_1}{K_0} \bar{E} \frac{\sin^2 \alpha}{4}}{\frac{1}{(1+\nu_0)^2(1-\nu_0)} + \frac{K_1}{K_0} \bar{E} \sin^4 \alpha}, \quad (9)$$

где обозначено $\bar{E} = \frac{E_1}{E_0}$.

Исследуем зависимость коэффициента Пуассона ν_{xy} от угла α , решив уравнение:

$$\frac{\partial \nu_{xy}}{\partial \alpha} = 0 \quad (10)$$

Уравнение (10) принимает вид

$$\sin 2\alpha \left\{ \sin^4 \alpha - \frac{2(1-\nu_0-\nu_0^2)}{\frac{K_1 E_1}{K_0}(1+\nu_0)(1-\nu_0^2)} \sin^2 \alpha + \frac{1}{(1+\nu_0)(1-\nu_0^2)} \frac{K_1 E_1}{K_0} \right\} = 0 \quad (11)$$

В (11) выражение в скобках не имеет действительных корней, так что экстремум достигается функцией (9) при $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, максимальное и минимальное значение коэффициента Пуассона при $\alpha = 0$ и $\alpha = \frac{\pi}{2}$ соответственно имеет вид

$$\begin{aligned} \nu_{xy \max}(0) &= \nu_0 + \nu_0^2; \\ \nu_{xy \min}\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\nu_0 + \nu_0^2}{1 + \frac{K_1 E_1}{K_0}(1+\nu_0^2)(1-\nu_0)}. \end{aligned} \quad (12)$$

На рис. 2 предоставляем график зависимости ν_{yx} от α .

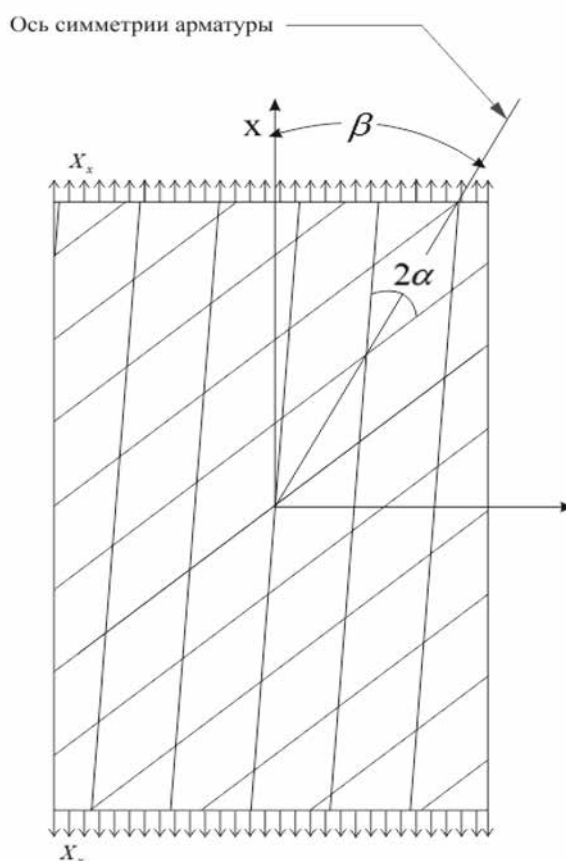


Рис. 2 Графическая модель растяжения пластины

В силу сложности природы процессов, происходящих на границе раздела «матрица – волокно» приведенная математическая модель не предусматривает вклад граничного слоя в коэффициенте Пуассона. Сравнение полученных результатов с экспериментальными данными позволит точно оценить вклад граничного слоя.

Таким образом:

- 1) значение коэффициента Пуассона зависит от угла между осью армирования и направлением действующей внешней силы;
- 2) качественный характер кривой зависимости коэффициента Пуассона композита ν_{yx} от угла α , согласно (12) имеет вид, представленный на рис. 2 и определяется значением ν_0 матрицы композита;
- 3) приведенная в работе математическая модель позволяет провести сравнительный анализ упруго-прочностных свойств сложных полимерных систем;
- 4) полученные в работе результаты могут быть полезны при конструировании композиционных материалов и может быть предложен как неразрушающий метод контроля свойств композитных материалов.

Литература

1. Раджабов З. Р., Бубман С. З., Магомедов Г. М. Релаксационные свойства композитов на основе жидкокристаллических сополиэфиров // Механика композитных материалов. Серия Б. 1991. Т. 33. № 6. С. 475.
2. Магомедов Г. М. Анизотропия вязко-упругих свойств слоистых металлоорганопластиков / З. Р. Раджабов, Г. П. Машинская, А. Б. Айвазов // Механика композитных материалов. 1989. Т. 25. С. 559–563.
3. Алексеев А. А., Макаров Е. В. Упругие свойства волокнистых композиционных материалов // Ученые записки ЦАГИ. 1972. Т. III. № 3.
4. Макаров Е. В. Основы математической теории упругости. М.: МГОУ, 2007. С. 350.

УДК 616.314 – 089.28.083.3.001.57

Лола Донат Владимирович, Назаров Антон Сергеевич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗУБНЫХ РЯДОВ В ПОЛНЫХ СЪЕМНЫХ ПРОТЕЗАХ

Статья посвящена разработке математической модели конструирования зубных рядов при различных вариантах соотношения межальвеолярных дуг и степенях атрофии альвеолярных отростков беззубых челюстей.

Ключевые слова: математическая модель, беззубые челюсти, альвеолярные отростки.

Donat Lola, Anton Nazarov

MATHEMATICAL MODELING OF DENTITION IN COMPLETE DENTURES

The article focuses on the development of a mathematical model for designing dentition in different types of the ration between the interalveolar arcs and the degree of atrophy in the alveolar processes of edentulous jaws.

Key words: mathematical model, edentulous jaws, alveolar processes.

Протезирование пациентов в случае полного отсутствия зубов является одной из наиболее сложных проблем ортопедической стоматологии. Сложность ортопедического лечения заключается в том, что вследствие потери зубов и развития атрофических процессов челюстей утрачиваются ориентиры, определяющие высоту и форму альвеолярных отростков. В клинической практике встречается большое разнообразие беззубых челюстей с различной степенью атрофии альвеолярных отростков, особенности которых должны учитываться при планировании конструкции съемных протезов.